第七章　边界层分离、绕流、尾迹与阻力

本章导言

第 6 章讨论了高 Reynolds 数流动中的边界层，并指出逆压梯会使近壁流体减速、壁面剪切应力降低，并可能最终导致边界层分离。

本章继续沿着这条物理链展开：

逆压梯 → 近壁动量亏损 → 壁面剪切减小 → 边界层分离 → 剪切层与尾迹 → 压强分布失去前后对称 → 压差阻力.

这条链条是理解真实物体绕流的核心。

对于理想无黏流动，一个对称物体前后的压强分布可以保持对称，从而得到零阻力。这就是著名的**D'Alembert 悖论**（D'Alembert's paradox）。然而真实流体具有黏性，黏性通过无滑移条件形成边界层，又通过边界层分离改变整体流场和压强分布，最终产生有限阻力。

因此，黏性对高 Reynolds 数绕流的影响具有一个非常重要的特点：

黏性虽然主要集中在很薄的边界层中，却可以通过分离显著改变整个外流场。

本章将以平板、圆柱和一般钝体绕流为典型例子，讨论：边界层为什么会分离；分离点如何判断；分离后如何形成回流区和尾迹；摩擦阻力与压差阻力有何不同；圆柱绕流如何随 Reynolds 数从近似附着流演化到稳态回流、Kármán 涡街、三维复杂尾迹以及高 Reynolds 数阻力危机；Strouhal 数如何描述非定常涡脱落；为什么无黏势流给出零阻力，而真实流动却有显著阻力。

Generated 2026-08-30 23:28

学习目标

完成本章学习后，应能够：

1. 解释逆压梯如何使近壁流体减速，并使用壁面剪切应力

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w$$

   描述分离过程，说明 $\tau_w = 0$ 判据的适用范围；
2. 说明分离后回流区、自由剪切层和尾迹如何形成；

3. 使用明确的界面法向约定，从表面应力积分得到物体所受流体力；
4. 区分摩擦阻力与压差阻力，并比较流线型物体和钝体的主要阻力来源；
5. 在给定角坐标约定下推导圆柱势流的表面速度和压强系数，并解释 D'Alembert 悖论；
6. 描述圆柱尾迹由稳态回流、二维周期涡脱落到 Mode A、Mode B 三维失稳的典型演化；
7. 用时间尺度比解释 Strouhal 数，并由 Re_D 与 St 估算涡脱落频率；
8. 解释阻力危机中 "边界层转捩—分离延迟—尾迹变窄—压差阻力下降" 的物理链条；
9. 在适用条件满足时，由下游尾迹速度剖面计算二维阻力。

7.1 分离机制：从逆压梯到尾迹形成

第 6 章已经得到边界层外部的 Euler 关系

$$U_e\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p_e}{\mathrm{d}x}.$$

当 $\mathrm{d}p_e/\mathrm{d}x>0$ 时，上式要求 $\mathrm{d}U_e/\mathrm{d}x<0$，即外缘流动沿下游减速。这种压强沿流向升高的情形称为**逆压梯**（adverse pressure gradient）。边界层内有 $p(x,y)\approx p_e(x)$，所以各高度处近似承受相同的逆向压强梯度；但无滑移已经使近壁速度远低于外缘速度，近壁流体的流向动量最小，因而最先发生显著减速。

壁面剪切应力定义为

$$\tau_w=\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{7.1}$$

这里 x 沿参考来流方向、y 从壁面指向流体，所以 τ_w 保留正负号；它与壁面两侧牵引方向及 $|\tau_w|$ 的区别遵循第 2 章的壁面剪切符号约定。正常附着时 $(\partial u/\partial y)_w>0$，故 $\tau_w>0$。逆压梯使近壁速度剖面逐渐变得不饱满，壁面速度梯度随之减小；当该梯度降为零时，

$$\boxed{\tau_w=0.} \tag{7.2}$$

这一位置称为**分离点**（separation point）。若逆压梯继续作用，壁面附近的流向速度可以反向，附着边界层便转入回流和分离状态。

分离点、回流与边界层脱离。

在分离点上游，$\tau_w>0$，速度剖面仍满足 $u>0$，并沿远离壁面方向增加。经典二维稳态边界层的分离点满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w=0.$$

$\tau_w=0$ 是经典稳态二维分离的一个重要局部判据，但复杂三维、非定常流动中的分离不能仅靠这一条公式完整描述。

Generated 2026-05-30 23:28

分离点下游的壁面附近可能出现

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{w} < 0.$$

此时局部流向速度可变为 $u < 0$，形成**回流**（reverse flow），相应有 $\tau_w < 0$。

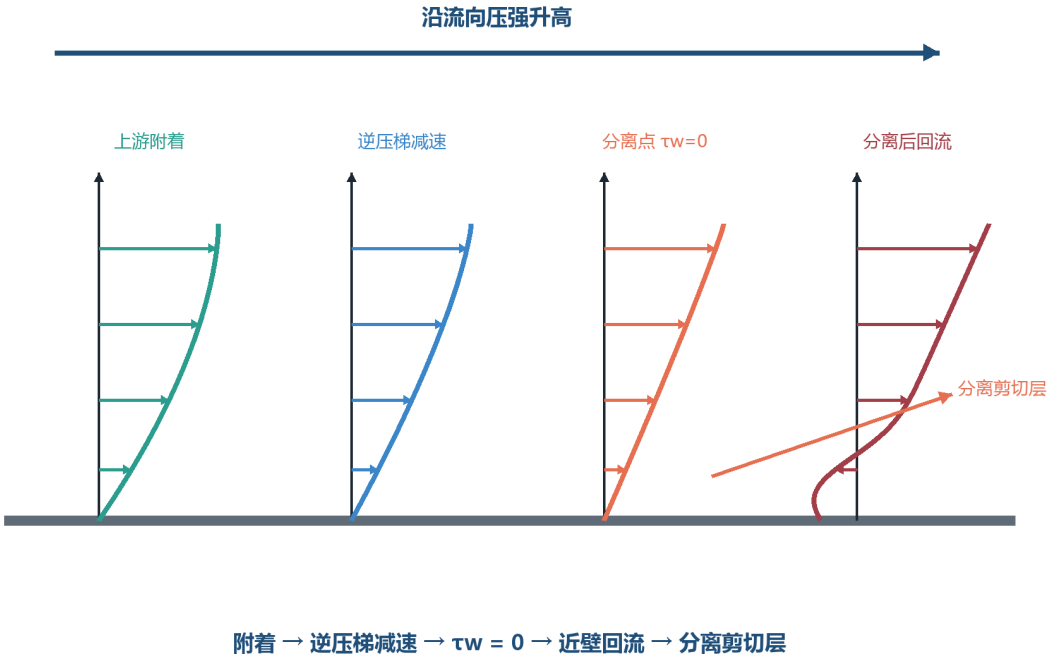


图 7.1: 边界层分离的物理过程：附着边界层进入逆压梯区后，近壁流体逐渐减速，壁面剪切降为零，继而出现回流并形成离开壁面的分离剪切层。

边界层分离不能简单归因于“黏性太强”。无滑移首先造成近壁速度亏损，壁面黏性又持续抽取流向动量；当流体进入逆压梯区域后，原本动量最低的近壁流体最难克服逐渐升高的压强，其速度和壁面梯度因而继续下降。壁面剪切降为零后，近壁流动可发生反向，原先贴附壁面的流线随之离开表面。分离的直接机制，是近壁流体没有足够动量抵抗逆压梯。

分离后的自由剪切层、回流区与尾迹。

边界层一旦离开壁面，原先集中在壁面附近的强速度梯度和涡量并不会消失，而会随分离流离开壁面，形成**自由剪切层**（free shear layer）。

剪切层两侧通常存在明显速度差 $\Delta U = U_1 - U_2$，因而涡量集中，并且通常比附着边界层更容易失稳。随着下游发展，剪切层卷起为大尺度涡结构，涡之间继续相互作用；在一定 Reynolds 数范围内，这一过程形成规则的周期涡脱落，进一步发展后则产生多尺度的复杂尾迹。

物体后方由分离点、自由剪切层以及再附点或下游流动围成的低速区域称为**回流区**（recirculation region），其中时间平均流向速度甚至可以为负；更下游速度仍低于外部来流的区域称为**尾迹**（wake）。回流与尾迹并非几个彼此独立的“现象标签”：分离剪切层携带涡量进入下游，造成速度剪切和流向动量亏损，同时伴随压强恢复以及非定常大尺度结构；Reynolds 数继续增加后，这些结构还会三维化和湍流化。

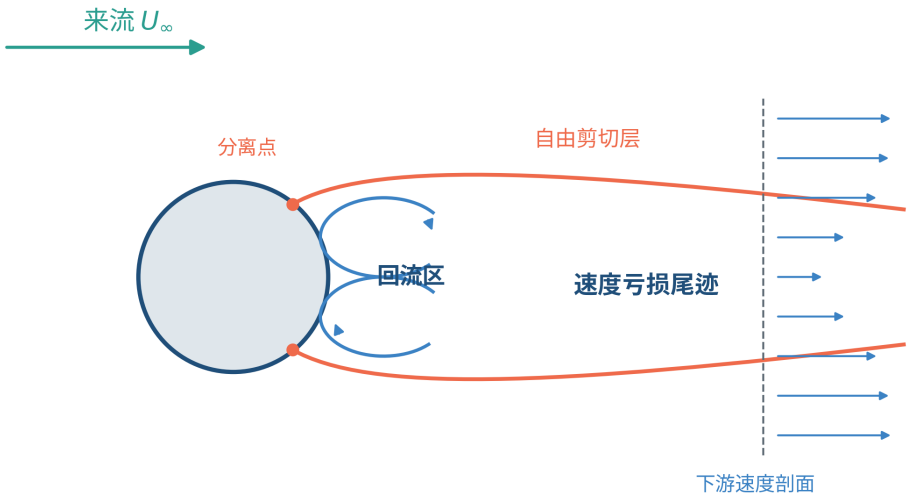


图 7.2: 钝体绕流中的分离剪切层、回流区与下游速度亏损尾迹。

从整体动量守恒看，物体所受阻力的反作用最终表现为下游流体动量通量的改变。因此，尾迹速度分布不仅描绘了分离后的流动结构，还能用来间接计算物体阻力；第 7.4 节将把这一**尾迹积分法**写成可计算的公式。

7.2 物体受力：表面应力、阻力分解与系数

表面应力与法向约定。设 S 为物体与流体接触的湿表面，σ 表示从流体一侧取极限所得的 Cauchy 应力。定义 n_b 为物体域的外法向，即从物体指向流体；定义 n_f 为流体域在该固壁边界上的外法向，即从流体指向物体。因此，在同一界面上

$$n_b = -n_f. \tag{7.3}$$

沿用第 2 章的 Cauchy 牵引约定，以流体域外法向 n_f 构造的

$$t_{b\to f} = \sigma \cdot n_f$$

表示**物体对流体**的牵引。由作用与反作用关系，流体对物体的牵引为

$$t_{f\to b} = -\sigma \cdot n_f = \sigma \cdot n_b. \tag{7.4}$$

对于 Newton 流体：

$\sigma = -pI + \tau.$

因此，流体对物体的表面牵引可以分成压强作用与黏性作用：

$$t_{f\to b} = -pn_b + \tau \cdot n_b.$$

物体所受总流体力为

$$F = \int_S \sigma \cdot n_b \,\mathrm{d}S = -\int_S \sigma \cdot n_f \,\mathrm{d}S. \tag{7.5}$$

以下所写的 F、阻力 F_D 和升力 F_L 均指**流体对物体**的作用力。若改用流体控制体作动量平衡，边界积分自然采用 n_f，转换为物体受力时必须保留上式中的负号。由此也可看出，孤立地写 $\int_S \sigma \cdot n \,\mathrm{d}S$ 而不说明 n 属于哪一侧，会留下一个实质性的符号歧义。标量 D 在本书中仍表示直径，粗体 $\boldsymbol{D}$ 则保留表示变形率张量。

若来流沿 x 方向，总力的流向分量 $F_D = F_x$ 称为**阻力**（drag）；垂直于来流的分量称为**升力**（lift），二维问题取升力沿 y 时有 $F_L = F_y$。

摩擦阻力与压差阻力。

表面切向黏性应力产生的分量称为**摩擦阻力**（skin-friction drag），其直接来源是壁面剪切应力 τ_w；表面压强前后不对称产生的分量称为**压差阻力**或形状阻力（pressure drag 或 form drag），其本质是 $p_{\text{前部}} \neq p_{\text{后部}}$。两部分相加得到

$$F_D = F_{D,f} + F_{D,p}, \tag{7.6}$$

其中 $F_{D,f}$ 为摩擦阻力，$F_{D,p}$ 为压差阻力。平行于来流的平板通常以摩擦阻力为主；钝体分离后背面维持低压，压差阻力往往成为主要贡献。

流线型物体与钝体。

流线型物体的表面曲率变化平缓，逆压梯较弱，分离较晚，尾迹也较窄，所以压差阻力较小，摩擦阻力在总阻力中可能占较大比例；翼型、流线型车身和水下航行器属于这一类。圆柱、方柱、迎风平板和建筑物等钝体则会使外流迅速减速并形成强逆压梯，边界层较早分离，宽尾迹和较低背压使压差阻力占据主导。流线型设计的核心依据由此可以表述为：延迟分离，缩小尾迹，并改善背部压强恢复。

阻力系数与压强系数。

定义阻力系数：

$$\boxed{C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_{\text{ref}}}.} \tag{7.7}$$

其中：F_D 为阻力；U_∞ 为来流速度；A_{ref} 为参考面积。

阻力系数一般满足 $C_D = f(Re, \text{几何形状}, \text{表面粗糙度}, ...)$；对于可压缩流动，还会受到 Mach 数等参数影响。

Generated 2026-05-30 23:25

压强系数。定义

$$\boxed{C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}.} \tag{7.8}$$

压强系数反映物体表面压强相对于来流动压的变化。对称且不分离的流动可能保持前后压强对称；真实流动一旦分离，迎风面高压与背风面低压之间不能充分恢复，因而产生显著压差阻力。

7.3 圆柱绕流：从势流悖论到阻力危机

在讨论真实圆柱绕流前，先考虑二维圆柱无黏势流。

对于半径为 R 的圆柱，均匀来流沿 $+x$ 方向，速度为 U_∞。为使图和公式使用同一约定，这里只在上半表面定义局部弧角 θ：迎风驻点为 $\theta = 0$，沿上半表面顺时针、也就是顺着外流方向增加，背风驻点为 $\theta = \pi$；切向单位矢量 e_θ 指向 θ 增大的方向。在这一局部约定下，表面切向速度分量为

$$u_\theta(R, \theta) = +2U_\infty \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi. \tag{7.9}$$

若改用从下游 $+x$ 射线起、逆时针增加的标准极角 α，则同一速度应写成 $u_\alpha = -2U_\infty \sin\alpha$。两个负号约定的差别来自切向基矢方向，并不改变速度大小或下述 C_p 分布。本节的 θ 仅表示圆柱表面角度；边界层动量厚度仍沿用第 6 章的 θ，二者只能在各自明确限定的局部语境中使用。

由 Bernoulli 方程：

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2.$$

因此表面压强系数：

$C_p = 1 - \left(\frac{u_\theta}{U_\infty}\right)^2$.

代入式 7.9：

$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{7.10}$$

势流解中前、后驻点均有

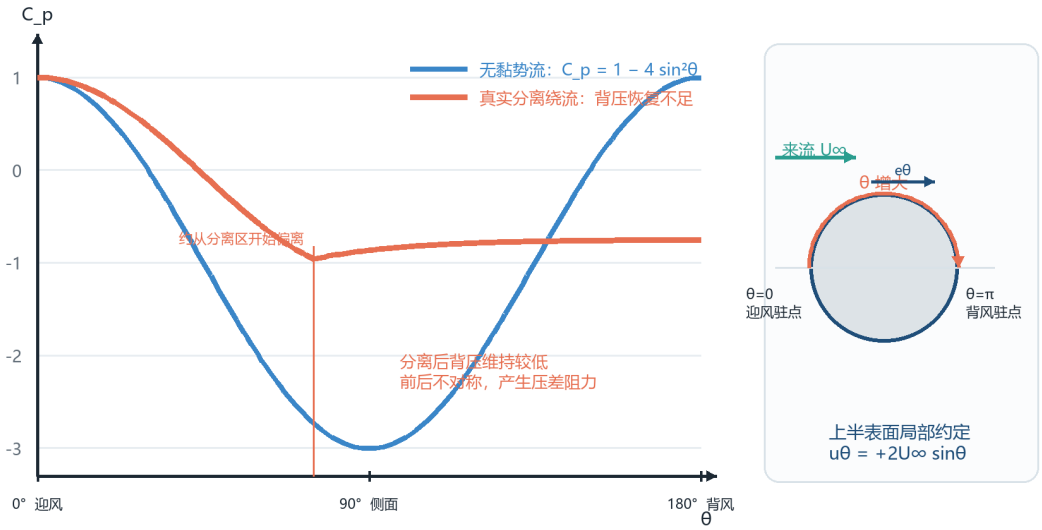
$C_p = 1$.

与此同时，上下两侧的压强最低，前后压强分布完全对称，所以压强对阻力的积分贡献为零；无黏流体又没有黏性剪切应力，于是总阻力为

$$F_D = 0.$$

这就是 D'Alembert 悖论的经典体现。

Generated 2026-08-30 15:28



定性对照：橙色曲线不对应某一特定 Reynolds 数或实验数据

图 7.3: 圆柱表面压强系数的定性对照及角坐标约定。上半表面以迎风驻点为 $\theta = 0$，沿顺时针外流方向增至背风驻点 $\theta = \pi$，故 $u_\theta = +2U_\infty \sin\theta$。无黏势流的压强分布前后对称；真实分离绕流的背面压强恢复不足。橙色曲线仅表示物理趋势，不对应某一特定 Reynolds 数或实验数据。

D'Alembert 悖论。对于稳态、不可压缩、无黏、无旋势流，绕对称物体的理论预测可能给出

$$F_D = 0.$$

但真实物体在流体中运动显然存在阻力，这种矛盾称为 **D'Alembert 悖论**。

势流理论在其假设范围内是自洽的，问题在于：

> 真实固壁流动满足无滑移条件，而理想势流只满足无穿透条件。

真实流体因无滑移条件在壁面形成边界层。边界层在逆压梯作用下分离后，流场的前后对称性被破坏，物体后方出现尾迹，背面压强也无法恢复到前部水平；由此产生的压差阻力使总阻力满足 $F_D > 0$。这一悖论的物理解答可以写成：

微小但非零黏性 → 无滑移 → 边界层 → 逆压梯 → 分离 → 尾迹与压强不对称 → $F_{D,p} > 0$

这一过程是高 Reynolds 数黏性流动最重要的物理图像之一。

圆柱绕流随 Reynolds 数的演化。

圆柱绕流是展示 Reynolds 数如何改变流动拓扑、边界层状态、尾迹结构和阻力特性的经典案例。定义

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu}. \tag{7.11}$$

随着 Re_D 增加，圆柱绕流不是简单地从“层流”一步变成“湍流”，而是依次改变分离状态、尾迹对

称性、空间维数和近壁边界层状态。下表把后文使用的经验范围和理想模型临界值集中列出，使数值、物理事件和来源彼此对应。

流动事件	典型 Re_D 或理想临界值	主要依据
弱分离发展为稳态对称双涡	约 4 起，至约 40 仍可保持稳态	Taneda 低 Reynolds 数可视化与 Tritton 实验，文献 17、18
二维稳态尾迹发生 Hopf 失稳	约 45–47	Tritton 实验与 Jackson 二维数值分岔，文献 18、19
Mode A 三维失稳	188.5 ± 1.0	Barkley 与 Henderson 的 Floquet 稳定性分析，文献 21
Mode B 三维失稳	约 259	Barkley 与 Henderson；实验转变范围参见 Williamson，文献 21、22
光滑圆柱分离前边界层进入临界转捩区	约 3×10^5 起	Achenbach 与 Schewe 的高压风洞实验，文献 23、24
光滑圆柱的典型阻力危机	约 $(3\text{–}4) \times 10^5$	Achenbach 与 Schewe，文献 23、24
跨临界区出现较窄频谱	约 5×10^6 起	Schewe 与 Roshko 的高 Reynolds 数实验，文献 24、25

> **这些数值是有条件的典型范围**
>
> 低 Reynolds 数实验会受到圆柱长径比和端部条件影响，理想无限长圆柱的二维或 Floquet 临界值也不等同于有限跨度实验中的锐利分界；阻力危机的位置还会随来流湍流度、表面粗糙度、阻塞比和测量判据显著移动。因此，表中数值用于建立演化顺序，不能当作脱离实验条件的普适常数。

很低 Reynolds 数：近似附着的黏性绕流。当 $Re_D \ll 1$ 时，黏性占主导，流线前后近似对称，通常没有明显的分离回流区，也没有周期涡脱落。随着 Re_D 从极小值逐渐增加，在 $Re_D \lesssim O(1)$ 的范围内，黏性的影响可以扩展到圆柱周围很大的区域。

二维无限长圆柱的严格 Stokes 极限存在 **Stokes 悖论**，因此不能像三维球体那样直接写出 $C_D = 24/Re$；下文讨论阻力系数时还会用到这一差别。

约 $4 \lesssim Re_D \lesssim 40$：稳态对称回流区。当惯性进一步增强时，圆柱后部首先出现分离，并形成一对近似对称的稳态回流涡。早期实验把稳态双涡开始出现的位置放在 $Re_D \approx 5$ 附近，而具体起点受实验判据影响；此时尾迹仍可以保持稳态和关于中心线对称，随着 Reynolds 数增加，回流区的长度和强度一般都会增加（文献 17、18）。

这一阶段说明：**分离并不必然意味着非定常涡脱落。**分离可以先形成稳定的平均回流结构，随后尾迹才发生失稳。

Generated 2026-08-30 23:28

$Re_D \approx 47$ 以上：二维周期涡脱落。当 Re_D 超过二维尾迹的经典失稳阈值后，稳态对称尾迹失去稳定性。对理想二维圆柱，这一 Hopf 失稳阈值通常取为

$$Re_D \approx 47.$$

实验和数值稳定性研究给出的临界值约在 45–47（文献 17–19）。随后，上下两侧剪切层交替卷起并脱落相反旋向的涡，形成 **Kármán 涡街**。在三维失稳发生以前，二维周期性仍然是非常重要的基本动力学图像。

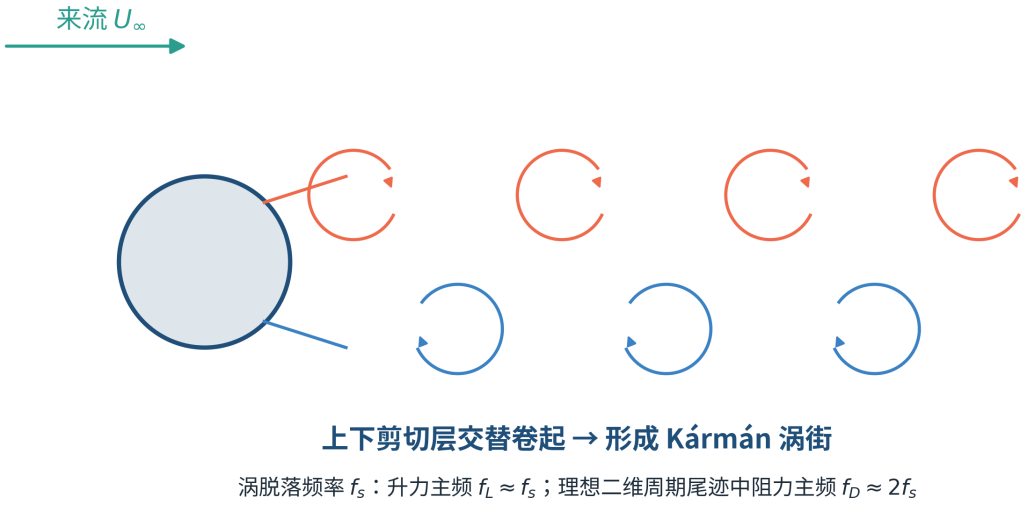


图 7.4: 圆柱后方的 Kármán 涡街：上下两侧旋涡以基本频率 f_s 交替脱落，升力主频通常约为 f_s；在理想二维周期尾迹中，阻力主频通常约为 $2f_s$。低 Reynolds 数周期尾迹范围参见文献 18–20。

约 $Re_D = 190$–260：三维失稳的典型起点。 Reynolds 数继续增加后，二维 Kármán 涡街本身还会发生三维失稳。对理想无限长圆柱的周期基流，经典 Floquet 分析给出 Mode A 的临界值 $Re_D = 188.5 \pm 1.0$，随后 Mode B 在 $Re_D \approx 259$ 附近出现；实验中的转变常表现为受端部条件和扰动影响的有限范围，而不是两个绝对锐利的界面（文献 21、22）。尾迹由此出现展向变化、三维涡结构和更多尺度之间的相互作用，并逐渐发展为复杂甚至湍流的尾迹。

在这一阶段，**圆柱近壁边界层可以仍以层流形式发展并发生层流分离，而分离后的尾迹已经具有强烈的三维性和湍流性**。因此，“边界层状态”和“尾迹是否湍流”是两个需要区分的概念。

亚临界高 Reynolds 数：层流分离与宽尾迹。对光滑圆柱，在阻力危机以前的较高 Reynolds 数范围内，圆柱表面边界层通常在最终分离前仍主要保持层流特征。层流边界层抵抗逆压梯的能力较弱，因此分离位置相对靠前，后方形成较宽的低压尾迹，压差阻力显著，C_D 维持在 $O(1)$ 的量级（文献 23–25）。

$Re_D \sim (3$–$4) \times 10^5$：光滑圆柱的典型阻力危机。 继续提高 Reynolds 数后，圆柱表面边界层可能在最终分离前发生转捩。典型过程可概括为

$$\text{层流边界层} \to \text{层流分离} \to \text{转捩与再附} \to \text{湍流边界层} \to \text{更靠后的最终分离}.$$

湍流边界层具有更强的跨层动量交换，能够把外层较高动量输运到近壁区，因此更能抵抗逆压梯。最终分离点向后移动、尾迹变窄、背压提高，压差阻力明显下降，这就是**阻力危机**（drag crisis）。在低湍流度来流和光滑圆柱的典型实验中，临界范围约为 $Re_D = (3\text{–}4)\times 10^5$；具体位置会随表面粗糙度、来流湍流度和试验条件显著移动（文献 23、24）。



图 7.5: 圆柱尾迹从二维周期涡脱落，经 Mode A、Mode B 三维失稳，到分离前边界层转捩与阻力危机的纵向事件序列。纵向间距只表示先后，不按 $\log Re_D$ 比例绘制；临界值与范围依据文献 18、19、21–25。

Kármán 涡街、Strouhal 数与力波动。

圆柱两侧剪切层具有相反符号的涡量。尾迹失稳后，上侧和下侧剪切层分别卷起相反旋向的涡并交替脱落，在下游形成交错排列的涡结构。如果两侧始终严格同步、对称地脱落，尾迹仍会保持镜面对称；但这种对称状态在一定 Reynolds 数以上会失稳。

微小扰动被放大后：

一侧涡结构的增长会抑制另一侧同步脱落，从而形成交替模式。

最终形成周期性反对称尾迹。

Strouhal 数。若涡脱落频率为 f_s，则定义

$$\boxed{St = \frac{f_s D}{U_\infty}.} \tag{7.12}$$

令流体越过一个圆柱直径所需的对流时间为 $t_{\text{conv}} = D/U_\infty$，涡脱落周期为 $t_{\text{shed}} = 1/f_s$，则

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty} = \frac{t_{\text{conv}}}{t_{\text{shed}}}. \tag{7.13}$$

因此，St 比较的是“越过一个直径的对流时间”与“完成一次涡脱落的周期”。例如 $St \approx 0.20$ 意味着 $t_{\text{shed}} \approx 5t_{\text{conv}}$，而不是说两种时间尺度相等。由定义还可得到频率关系

$f_s = St\frac{U_\infty}{D}$.

因此，在 St 变化不大的 Reynolds 数范围内，来流速度越大，涡脱落频率越高；物体尺寸越大，涡脱落频率越低。不过 St 本身仍会随 Reynolds 数和尾迹状态变化，不能在跨越失稳或转捩区间时把 0.20 当作普适常数。

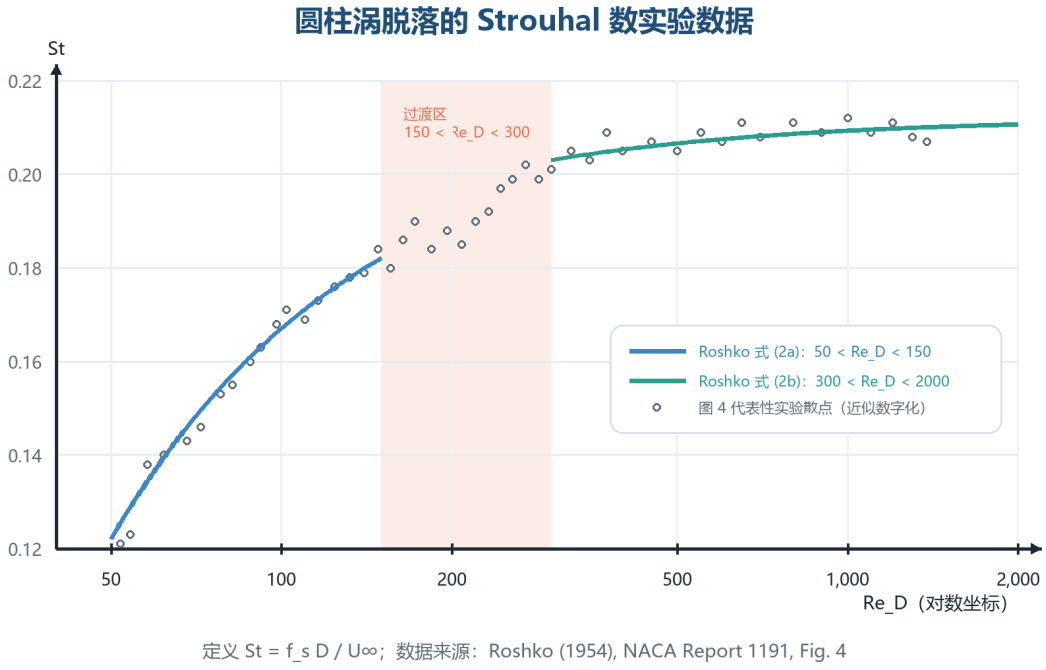


图 7.6: 圆柱 Strouhal 数随直径 Reynolds 数变化的实验数据。散点为从 Roshko（1954）图 4 近似数字化的代表性测量点，实线为该文式 (2a)、(2b)；$150 < Re_D < 300$ 的过渡区没有强行拟合。数字化数据用于教学显示原始散点趋势，存在有限读图误差，精确比较应回到文献 20 的原图。

图图 7.6 也说明了无量纲频率为何仍需实验来源：在稳定涡街区，St 随 Re_D 快速上升；经过约 $150 < Re_D < 300$ 的过渡区后，它才在该组实验覆盖的较高 Reynolds 数范围内趋近约 0.21。Roshko 报告说明这些数据已作风洞阻塞修正，但未作端部效应修正；在所用圆柱尺寸间没有观察到系统性差异。图中保留测量散布并叠加原作者拟合，而不是凭物理示意绘制一条任意曲线。

周期涡脱落会产生周期性升力和阻力波动；如果涡脱落频率接近结构固有频率，还可能引起涡激振动、大幅结构响应和疲劳破坏。因此，Strouhal 数在烟囱、海洋立管、桥梁、换热管束和高层建筑等问题中非常重要。

力的周期波动。由于上下两侧涡结构交替脱落，圆柱表面压强分布也随时间上下交替不对称，因此升力 $C_L(t)$ 近似以涡脱落基本频率周期振荡。

阻力。阻力不区分上下方向，因此两侧涡脱落对阻力的影响常表现为更高频率的周期变化；在理想二维周期尾迹中，阻力波动的主要频率往往约为升力基本频率的 2 倍。

时间平均阻力。即使瞬时阻力随时间振荡，其时间平均值 $\overline{C_D}$ 仍为正；对于钝体绕流，平均压差阻力通常是主要贡献。

例题 7.1 由 Reynolds 数和 Strouhal 数判断圆柱尾迹频率

直径 $D = 0.050\ \mathrm{m}$ 的圆柱置于水流中，来流速度 $U_\infty = 0.80\ \mathrm{m/s}$，运动黏度 $\nu = 1.0\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$。若该工况测得或采用 $St = 0.20$，求：（1）Re_D 并判断典型尾迹状态；（2）涡脱落频率和周期；（3）理想交替脱落图像中的主要升力、阻力波动频率。

解：圆柱 Reynolds 数为

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{(0.80)(0.050)}{1.0\times10^{-6}} = 4.0\times10^4.$$

该值远高于二维周期尾迹和最初三维失稳的典型阈值，又低于光滑圆柱阻力危机的典型范围。因此，按本节的 Reynolds 数演化图像，应预期分离后的尾迹已经具有显著三维性和多尺度非定常运动；但这并不自动意味着分离前的圆柱边界层已经成为湍流边界层。

由 Strouhal 数定义，

$$f_s = St\frac{U_\infty}{D} = (0.20)\frac{0.80}{0.050} = 3.2\ \mathrm{Hz}.$$

相应周期为

$$t_{\mathrm{shed}} = \frac{1}{f_s} = 0.313\ \mathrm{s}.$$

在理想的交替涡脱落图像中，升力主频约为 $f_s = 3.2\ \mathrm{Hz}$，阻力主频约为 $2f_s = 6.4\ \mathrm{Hz}$。

结果解释：Re_D 用于判断流态，St 把已经形成的脱落频率与对流尺度联系起来。真实三维湍流尾迹的频谱还会包含展宽的峰和其他频率成分，因此 $2f_s$ 应理解为理想对称关系给出的主要频率估计，而不是所有瞬时阻力信号的唯一频率。

三维化与复杂尾迹。

上述演化已经表明，二维 Kármán 涡街只代表有限 Reynolds 数范围内的理想化动力学。随着 Reynolds 数继续增加，真实圆柱尾迹会出现展向起伏、三维涡结构以及多尺度相互作用，最终形成湍流尾迹。

这里需要区分三个不同层次的问题：

1. **近壁边界层是否层流或湍流；**
2. **分离后的自由剪切层是否已经失稳；**
3. **远尾迹是否已经三维化或湍流化。**

它们发生转变的 Reynolds 数并不相同。例如，在阻力危机以前，圆柱表面边界层仍可能主要以层流形式发展并分离，而下游尾迹早已具有三维和湍流特征。因此，“尾迹已经湍流”并不等于“分离前边界层已经是湍流边界层”；区分这两个状态是理解阻力危机的前提。

Reynolds 数与阻力系数。

Generated 2026-08-30 13:28

阻力系数一般是 Reynolds 数的函数：

$$C_D = f(Re_D).$$

圆柱绕流的 $C_D(Re_D)$ 曲线把前面讨论的流态变化浓缩在一张图中：低 Reynolds 数时黏性主导；随后分离与尾迹使压差阻力成为重要贡献；在亚临界高 Reynolds 数范围内 C_D 维持在 $O(1)$；进入阻力危机后，边界层状态改变使 C_D 突然下降。

低 Reynolds 数。在很低 Reynolds 数下，惯性很弱，阻力主要体现黏性尺度，因此随着 Reynolds 数增加，C_D 会快速下降。

三维球体在 Stokes 极限中有著名结果

$$C_D = \frac{24}{Re}.$$

但这个公式**不能直接套用到二维无限长圆柱**。二维圆柱的严格 $Re_D \to 0$ 极限存在 Stokes 悖论，其低 Reynolds 数阻力需要采用不同的渐近或有限 Reynolds 数处理。把球体的 $24/Re$ 直接写成圆柱定律，是一个需要避免的常见错误。

亚临界圆柱。 Reynolds 数进入中高范围后，圆柱后部已经发生分离，压差阻力通常成为总阻力的主要组成部分。随着尾迹从稳态双涡发展到周期涡街，再到三维复杂尾迹，C_D 的变化不再由简单的 $1/Re$ 标度决定，而更多取决于分离位置、背压和尾迹宽度。

阻力危机。在低湍流度来流和光滑圆柱的典型高 Reynolds 数条件下，阻力危机约发生在 $Re_D = (3\text{–}4) \times 10^5$。这并不是因为黏性突然减小，而是因为分离前的边界层发生转捩，增强的近壁动量输运使最终分离位置后移。分离延迟会缩窄尾迹并提高背压，压差阻力因而显著下降（文献 23、24）。由于钝体总阻力主要由压差阻力控制，较强的湍流混合即使增加了局部摩擦，仍可能使总阻力减小。

危机后区域。在更高 Reynolds 数下，分离前边界层可保持湍流状态，分离与尾迹结构继续随 Reynolds 数变化，C_D 也会从危机后的低值逐渐调整。此时具体曲线对表面粗糙度、来流湍流度和圆柱端部条件更为敏感。

粗糙度为什么有时会减小钝体阻力。

一般而言，粗糙度会增加摩擦阻力；但对于某些钝体高 Reynolds 数绕流，适当粗糙度可能提前触发边界层转捩。若转捩后的湍流边界层显著延迟分离，摩擦阻力虽然增加，压差阻力却可能大幅减小；当后者的降幅超过前者的增幅时，总阻力 F_D 反而可能减小。

高尔夫球表面的凹坑就是常见的定性示例。凹坑会增加局部表面摩擦和扰动，但同时可以使边界层更早转捩，从而把阻力危机移到更低的 Reynolds 数范围并延迟最终分离。这个例子再次说明：评价减阻不能只看壁面摩擦，而必须比较 $F_{D,f}$ 与 $F_{D,p}$ 的总和。

> ⚠ 总阻力要看两部分的竞争
>
> 减阻效果不能只根据摩擦分量 $F_{D,f}$ 或压差分量 $F_{D,p}$ 单独判断，而必须比较二者相加后的总阻力 $F_D = F_{D,f} + F_{D,p}$。

Generated 2026-05-13 23:28

7.4 尾迹动量亏损、分离控制与全书衔接

考虑二维物体绕流，在物体下游取足够远的截面。若压强已经恢复接近来流压强，并可忽略远场黏性应力，则阻力可以与尾迹中的动量亏损联系起来。

尾迹动量亏损公式的适用条件

以下简化表达式适用于：**二维、不可压缩流动；稳态流动或对非稳态流动取充分长时间平均；下游截面位于足够远处且覆盖完整尾迹；该截面压强已基本恢复到来流压强；远场黏性应力以及控制面上的其他未保留动量通量可以忽略。**若这些条件不满足，控制体动量方程中的压强、黏性应力、非定常项和其他通量项不能省略。

在适当条件下，可写出类似：

$$\boxed{F'_D = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u\,(U_\infty - u)\,\mathrm{d}y,} \tag{7.14}$$

其中 F'_D 是单位展向宽度阻力。

这一公式的物理意义很直接：如果没有物体，$u = U_\infty$ 处处成立；有物体后，尾迹中 $u < U_\infty$，因而形成流向动量亏损。物体所受阻力与该亏损直接相关，这与第 6 章动量厚度的思想具有明显联系。

例题 7.2　由高斯型尾迹速度剖面计算二维阻力

某二维钝体下游的时间平均尾迹速度近似为

$$u(y) = U_\infty \left[1 - a \exp\left(-\frac{y^2}{b^2}\right)\right],$$

其中 $U_\infty = 10\ \mathrm{m/s}$、$a = 0.30$、$b = 0.10\ \mathrm{m}$，空气密度为 $\rho = 1.20\ \mathrm{kg/m^3}$。假定下游截面满足式 7.14 的适用条件，求单位展向宽度阻力 F'_D；若物体迎风投影高度为 $D = 0.20\ \mathrm{m}$，再求阻力系数。

解：令 $s = y/b$。由给定剖面，

$$U_\infty - u = U_\infty a e^{-s^2},$$

所以

$$u(U_\infty - u) = U_\infty^2 \left(a e^{-s^2} - a^2 e^{-2s^2}\right).$$

利用 $\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}s$ 以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

代入高斯积分结果可得

$$F'_D = \rho U_\infty^2 b \left(a\sqrt{\pi} - a^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Generated 2026-03-30 23:28

代入数值：

$$F'_D = (1.20)(10)^2(0.10)\left[(0.30)\sqrt{\pi} - (0.30)^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] = 5.03 \text{ N/m}.$$

二维问题以单位展向宽度的参考面积 $D \times 1$ 归一化，因此

$$C_D = \frac{F'_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D} = \frac{5.03}{\frac{1}{2}(1.20)(10)^2(0.20)} = 0.419.$$

结果解释：积分同时包含速度亏损的一次项和二次修正项；只把 $U_\infty - u$ 直接积分会漏掉实际流经尾迹截面的局部速度 u。所得阻力只有在压强基本恢复、截面覆盖完整尾迹且其他控制面项可忽略时才成立。

分离的积分判断、影响因素与控制。

第 6 章给出了 von Kármán 动量积分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + (2+H)\frac{\theta}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} = \frac{C_f}{2}.$$

逆压梯下 $\mathrm{d}U_e/\mathrm{d}x < 0$。随着边界层发展，$\theta$ 增大，H 往往增大，C_f 减小；接近分离时，$C_f \to 0$，也即 $\tau_w \to 0$。从积分观点看，分离就是动量亏损积累到近壁流体无法继续保持附着的极限状态。

积分方程给出的是分离趋势而非由几何单独决定的固定位置。一个常见误区是：

> “某个几何形状的分离点是固定的。”

实际上，分离位置还取决于 Reynolds 数、压强梯度、边界层的层流或湍流状态、表面粗糙度、来流湍流度、非定常效应、壁面吸吹和物体运动。分离点因而是流动状态的一部分，而不是由几何形状单独确定的固定参数。

边界层控制与延迟分离。工程上常使用各种方法改变边界层动量状态：**流线型设计**减弱逆压梯，使边界层更容易保持附着；**壁面吸气**吸走近壁低动量流体，使速度剖面更饱满；**吹气或射流**向近壁区域输入动量；**涡流发生器**通过增强横向混合，把外层高动量流体带向近壁区域；在特定钝体问题中，还可利用**表面粗糙度或人工触发转捩**，借助湍流边界层更强的动量输运延迟分离。

这些方法虽然具体机制不同，但核心目标通常相似：

> **增加近壁流体抵抗逆压梯的能力。**

圆柱绕流综合案例及其与第 8 章的联系。

圆柱绕流几乎串联了本书前七章的主要知识：在**低 Reynolds 数**下，$Re \ll 1$，黏性主导，对应第 5 章 Stokes 流思想；Reynolds 数增加后，惯性增强，无滑移在壁面形成第 6 章所讨论的薄边界层；圆柱后半部外流减速并形成**逆压梯**，近壁低动量流体无法抵抗逆压梯而发生**边界层分离**，继而形成回流、尾迹与压差阻力；尾迹失稳后出现周期涡脱落，更高 Reynolds 数下尾迹进一步三维化并向湍流发展；继续提高 Reynolds 数，分离前边界层还可能发生转捩并触发阻力危机。

圆柱绕流由此成为观察 Reynolds 数如何改变主导机制、流动拓扑和工程载荷的一个浓缩案例。

Generated 2026-08-30 23:28

阻力机制的典型比较。

流动对象	主要阻力机制	典型特点
平行于来流的平板	摩擦阻力	边界层附着、压差小
流线型翼型	摩擦 + 较小压差	延迟分离
圆柱	压差阻力显著	较早分离、宽尾迹
方柱	压差阻力主导	尖角固定分离
迎风平板	压差阻力主导	强分离
高 Reynolds 数流线体	常需同时考虑	边界层状态重要

随着 Re 增加，圆柱尾迹还会经历

$$\text{稳态} \to \text{周期} \to \text{三维} \to \text{复杂非定常}.$$

这自然引出下一章的问题：复杂非定常流动进一步发展以后，为什么会形成湍流？第 8 章不会系统推导流动稳定性理论，而是从物理角度简要介绍扰动、失稳、转捩、湍流、Reynolds 分解、Reynolds 应力、壁湍流以及 RANS、LES 和 DNS。

本章知识链。本章最重要的逻辑关系可以概括为：**无滑移** $\to$ **边界层动量亏损** $\to$ **逆压梯** $\to$ τ_w **减小** $\to$ $\tau_w = 0$ $\to$ **分离** $\to$ **自由剪切层与回流区** $\to$ **尾迹** $\to$ **前后压强不对称** $\to$ $F_{D,p} > 0$。

随着 Reynolds 数继续增加，圆柱绕流还会经历**稳态回流区** $\to$ **周期涡脱落** $\to$ **三维复杂尾迹** $\to$ **亚临界高 Reynolds 数绕流** $\to$ **阻力危机** $\to$ **危机后湍流边界层绕流**的演化。

7.5 本章小结

1. 逆压梯满足 $\mathrm{d}p_e/\mathrm{d}x > 0$，并由外缘 Euler 关系对应 $\mathrm{d}U_e/\mathrm{d}x < 0$。由于近壁流体动量最低，它最先显著减速；经典二维稳态分离点满足 $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_w = 0$，继续发展后可出现 $\tau_w < 0$ 和近壁回流。

2. 分离不会消除原边界层中的速度梯度和涡量，而是把它们带入自由剪切层。剪切层卷起、失稳并形成回流区和尾迹，尾迹中的动量亏损则把局部流动结构与整体阻力联系起来。

3. 物体湿表面的两侧法向必须区分：n_b 从物体指向流体，n_f 从流体指向物体，且 $n_b = -n_f$。流体对物体的总力为 $F = \int_S \sigma \cdot n_b \,\mathrm{d}S = -\int_S \sigma \cdot n_f \,\mathrm{d}S$。

4. 总阻力可写为 $F_D = F_{D,f} + F_{D,p}$。摩擦阻力来自表面黏性剪切，压差阻力来自前后压强分布不对称；延迟分离、缩窄尾迹和改善背压恢复是流线型设计与多种流动控制方法的共同目标。

5. 本章圆柱势流的上半表面以迎风驻点为 $\theta = 0$，沿外流方向增至 $\theta = \pi$，所以 $u_\theta = +2U_\infty \sin\theta$，而 $C_p = 1 - 4\sin^2\theta$。势流压强前后对称并给出零阻力；真实流动通过 “无滑移—边界层—分离—尾迹” 破坏这种对称性，这正是 D’Alembert 悖论的物理解答。

Generated 2026-08-30 23:28

6. 圆柱尾迹随 Re_D 增加，先出现稳态对称回流，再于约 45–47 发生二维周期涡脱落，并在 $Re_D = 188.5 \pm 1.0$ 和约 259 附近出现 Mode A、Mode B 三维失稳。上述数值依赖理想模型或实验条件，不能视为无条件的普适分界。

7. Strouhal 数满足 $St = f_s D/U_\infty = t_{\mathrm{conv}}/t_{\mathrm{shed}}$。它把涡脱落频率与直径对流时间联系起来；在理想二维交替脱落中，升力主频约为 f_s，阻力主频约为 $2f_s$。

8. 光滑圆柱的典型阻力危机约在 $Re_D = (3\text{–}4) \times 10^5$：分离前边界层转捩增强近壁动量输运，使最终分离后移、尾迹变窄、背压升高，压差阻力因而显著下降。在远尾迹压强已恢复且其他控制面项可忽略时，速度剖面还可通过 $F'_D = \rho \int u(U_\infty - u)\,\mathrm{d}y$ 给出单位展向宽度阻力。

习题

题目层级： 必做（核心概念、基本推导与标准计算）； 选做（进阶推导、专题应用与方法比较）； 研究训练（开放论证、建模判断、CFD/实验分析或综合研究）。

基础题

7.1 必做

定义顺压梯和逆压梯。

利用

$$U_e \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p_e}{\mathrm{d}x}$$

说明二者分别对应外部流动加速还是减速。

7.2 必做

为什么逆压梯首先影响靠近壁面的低速流体？

7.3 必做

写出经典二维稳态边界层分离点判据：

$\tau_w = 0.$

说明它与

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w$$

之间的关系。

7.4 必做

Generated 2026-08-30 23:28

分别说明以下三种状态的壁面剪切应力符号：

1. 正常附着边界层；
2. 分离点；
3. 分离后的近壁回流区。

分离与尾迹

7.5 必做

用文字描述以下物理链：

$$\text{逆压梯} \rightarrow \text{分离} \rightarrow \text{尾迹}.$$

至少包含：近壁动量；壁面剪切；回流；自由剪切层。

7.6 必做

为什么分离后原先壁面附近的高涡量并不会消失，而会进入自由剪切层？

7.7 必做

解释“尾迹是流向动量亏损区”的含义。

7.8 必做

为什么宽尾迹通常意味着较大的压差阻力？

阻力

7.9 必做

说明摩擦阻力和压差阻力分别由什么物理作用产生。

7.10 必做

对于以下物体，判断通常哪类阻力更重要，并说明理由：

1. 平行于来流的薄平板；
2. 圆柱；
3. 方柱；
4. 流线型翼型。

7.11 必做

阻力系数定义为

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}.$$

Generated 2026-08-30 23:28

若同一物体、同一流体中：

C_D

近似保持不变，而速度增加为原来的 2 倍，则阻力增加多少倍？

圆柱势流与 D'Alembert 悖论

7.12 选做

圆柱势流表面速度为：

$u_\theta = -2U_\infty \sin\theta.$

由 Bernoulli 方程推导：

$C_p = 1 - 4\sin^2\theta.$

7.13 选做

根据：

$C_p = 1 - 4\sin^2\theta$

说明为什么圆柱势流前后压强分布对称。

7.14 选做

为什么理想无黏势流给出：

$F_D = 0,$

但真实圆柱绕流却有显著阻力？

7.15 选做

用以下关键词解释 D'Alembert 悖论：黏性；无滑移；边界层；分离；尾迹；压差阻力。

圆柱绕流与涡脱落

7.16 选做

定义圆柱 Reynolds 数：

$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu}.$

若：

$U_\infty = 1\ \mathrm{m/s},$

$D = 0.05\ \mathrm{m},$

$\nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s},$

Generated 2026-08-30 23:28

求 Re_D。

7.17 选做

结合本章流态图，用定性语言描述圆柱绕流随 Reynolds 数增加的典型演化：

$$\text{近似附着} \to \text{稳态双涡} \to \text{周期涡脱落} \to \text{三维复杂尾迹} \to \text{阻力危机}.$$

说明为什么这些 Reynolds 数分界只能理解为典型范围，而不是普适常数。

7.18 选做

为什么二维理想圆柱尾迹在：

$Re_D \approx 47$

附近会从稳态对称状态转变为周期涡脱落？

本题不要求稳定性数学推导，只需从 “对称尾迹失稳” 的角度说明。

Strouhal 数

7.19 选做

定义：

$St = \frac{f_s D}{U_\infty}$.

若：

$St = 0.2$,

$D = 0.10$ m,

$U_\infty = 5$ m/s,

求涡脱落频率。

7.20 选做

若在某 Reynolds 数范围内：

$St \approx$ const.,

讨论：

1. U_∞ 增加 2 倍时，f_s 如何变化？
2. D 增加 2 倍时，f_s 如何变化？

7.21 选做

为什么圆柱周期尾迹中，升力波动主频通常与涡脱落频率一致，而阻力波动主频常约为其 2 倍？

Generated 2026-08-30 23:28

分离控制与减阻

7.22 选做

为什么流线型设计可以显著减小钝体式压差阻力？

7.23 选做

说明以下方法为什么可能延迟分离：

1. 壁面吸气；
2. 吹气或射流；
3. 涡流发生器；
4. 提前触发边界层转捩。

7.24 选做

为什么高尔夫球凹坑可能在某些 Reynolds 数范围内降低总阻力？

你的回答必须同时讨论：

$F_{D,f}$

和

$F_{D,p}$.

尾迹动量积分

7.25 选做

在适当远场条件下，二维物体单位宽度阻力可写成：

$$F_D' = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u(U_\infty - u)\,\mathrm{d}y.$$

解释被积函数：

$u(U_\infty - u)$

为什么可以看作尾迹动量亏损的度量。

7.26 选做

如果某物体下游尾迹变得更窄，同时速度亏损也减小，为什么通常意味着阻力下降？

综合题

7.27 研究训练

Generated 2026-08-30 23:28

一个圆柱绕流实验中：

$D = 20$ mm,

$U_\infty = 2$ m/s,

$\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2/s.

1. 计算 Reynolds 数；
2. 若测得 $St = 0.19$, 计算涡脱落频率；
3. 如果来流速度增加到 4 m/s, 并假设 St 基本不变，估计新的涡脱落频率。

7.28 研究训练

某钝体改型后测得：表面摩擦阻力增加 15%；压差阻力降低 35%。

改型前：

$F_{D,f} = 20$ N,

$F_{D,p} = 80$ N.

求：

1. 改型前总阻力；
2. 改型后摩擦阻力；
3. 改型后压差阻力；
4. 改型后总阻力；
5. 总阻力变化百分比。

7.29 研究训练

解释下面这句话：

> “在高 Reynolds 数钝体绕流中，黏性作用区域可能很薄，但黏性仍然决定整体阻力的数量级和流场拓扑。”

你的回答至少应包含：边界层；分离位置；尾迹宽度；背压；压差阻力。

7.30 选做

某同学在圆柱绕流报告中写道：“低 Reynolds 数时可直接采用 $C_D = 24/Re_D$。” 指出这句话的问题。你的回答应区分三维球体 Stokes 阻力与二维无限长圆柱的 Stokes 悖论。

思考与讨论

1. 为什么边界层分离不是 “黏性太大” 的直接结果？
2. 为什么近壁低速流体比外层高速流体更容易被逆压梯减速？
3. 为什么分离可以使一个局部的边界层现象改变整个外部压强场？
4. 为什么圆柱势流的后驻点高压在真实高 Reynolds 数流动中通常无法恢复？

Generated 2026-08-30 23:28

5. 为什么钝体阻力往往主要是压差阻力，而不是摩擦阻力？
6. 为什么湍流边界层虽然具有更大的摩擦，却可能降低钝体总阻力？
7. 为什么 Kármán 涡街意味着流动已经不再保持瞬时上下对称？
8. Strouhal 数为什么适合比较不同速度和不同尺寸下的涡脱落频率？
9. 为什么尾迹积分可以用来测量阻力？
10. 如果一个数值模拟得到的圆柱尾迹在 $Re \approx 100$ 时仍然严格稳态且上下对称，你首先会怀疑哪些问题？
11. 为什么二维圆柱模拟在较高 Reynolds 数下可能给出与真实实验不同的结果？
12. 为什么光滑圆柱在阻力危机附近可能出现 “局部摩擦增强而总阻力下降” 的现象？
13. 为什么不能把球体的 Stokes 公式 $C_D = 24/Re$ 直接用于二维无限长圆柱？
14. 对一个实际减阻问题，你会优先减少摩擦阻力还是压差阻力？为什么必须先判断物体属于哪一类流动？

Generated 2026-08-30 23:28