

第四章 Navier–Stokes 方程的典型精确解

本章导言

前两章已经完成了两项基础工作：

1. 建立不可压缩 Newton 流体的 Navier–Stokes 方程；
2. 学会对控制方程进行无量纲化。

本章开始真正求解若干典型黏性流动。

但是，本章的目的并不是记忆一组“经典公式”。更重要的是训练一种处理黏性流动问题的基本方法：

从流动几何、稳态性、对称性和边界条件出发，判断 Navier–Stokes 方程中哪些项必然为零，再对剩余方程进行求解。

对于许多经典流动，原本复杂的非线性偏微分方程可以被大幅简化，最终变成常微分方程，甚至线性扩散方程。

本章将研究以下典型问题：平面 Couette 流；平面 Poiseuille 流；Couette–Poiseuille 组合流；Hagen–Poiseuille 圆管流；重力驱动液膜流；Stokes 第一问题；振荡平板流动（拓展内容）。

这些问题分别展示了：壁面剪切驱动；压强梯度驱动；多种驱动机制的叠加；圆柱坐标中的黏性流动；重力与黏性的平衡；非定常动量扩散。

通过这些例子，可以逐步建立对黏性、压强、边界条件和动量扩散之间关系的直觉。随后还将从能量角度讨论机械功输入、黏性耗散及其引起的温升，使“动量如何传递”和“机械能最终去了哪里”形成统一认识。

！ 区分：完整方程的精确解与近似模型内的基准解

本章所称的 **Navier–Stokes 精确解**，是指速度与压强场在所声明的理想化几何、物性、初边条件和对称性下，代入完整不可压缩 Navier–Stokes 方程后逐点成立。充分发展、轴对称或单向流动在这些问题中是精确定义的一部分，并不等同于求解误差。

如果在求解前还引入了窄间隙、薄层或其他渐近近似，所得公式则只是在该**近似模型内的精确基准解**。它可以用于估算和验证简化模型，却不应被表述为原始几何中完整方程的无条件精确解。窄间隙旋转黏度计就是本章的典型例子。

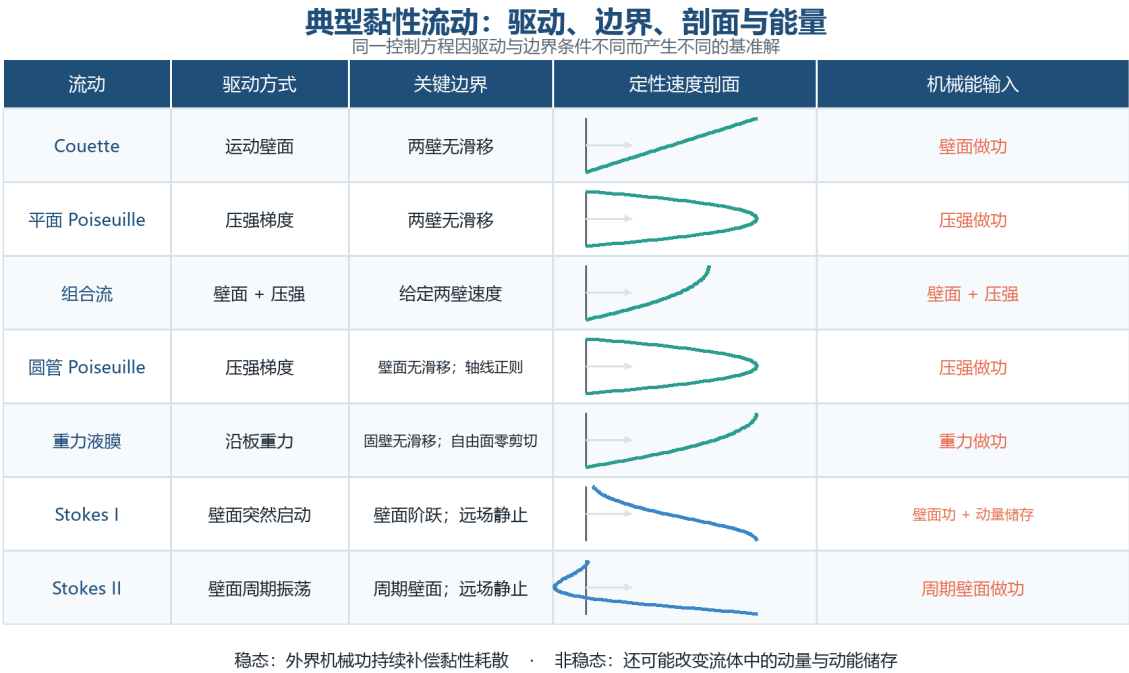


图 4.1: 本章典型流动总览：不同驱动方式与边界条件决定速度剖面，外界则通过运动壁面、压强或重力输入机械能；Stokes 问题还包含非稳态动量储存。各剖面仅表示定性形状。

学习目标

完成本章学习后，应能够：

- 1. 根据流动假设系统简化 Navier–Stokes 方程，并区分完整方程精确解与近似模型基准解；
- 2. 从定常、单向和充分发展条件出发，得到平行流问题的共同简化方程；
- 3. 推导平面 Couette 流速度分布和壁面剪切应力；
- 4. 推导平面 Poiseuille 流速度分布、流量、平均速度和壁面剪切应力；
- 5. 理解 Couette–Poiseuille 流中壁面运动与压强梯度的叠加效应；
- 6. 推导圆管 Hagen–Poiseuille 流及其流量–压降关系，并解释 $Q \propto R^4$ 的工程意义；
- 7. 区分旋转黏度计的窄间隙工程近似与圆柱 Couette 精确解；
- 8. 分析重力驱动薄液膜中的速度分布与流量；
- 9. 推导 Stokes 第一、第二问题，并理解非定常动量扩散和黏性穿透深度；
- 10. 解释稳态 Couette 流和 Poiseuille 流中的机械功输入与黏性耗散平衡；
- 11. 使用 Poiseuille 解析解检查离散方程、边界实现和派生量误差；
- 12. 使用无量纲变量表示典型解析解，并识别解的普适形式；
- 13.（拓展）理解黏性耗散如何在 Couette 流中引起温升。

4.1 求解典型黏性流动的一般方法

4.1.1 一般步骤

在处理一个新的黏性流动问题时，可以采用以下基本步骤。

第一步：明确几何和坐标系

首先确定：流动区域；固体边界；主要流动方向；合适的坐标系。

例如：平行平板：直角坐标；圆管：圆柱坐标；球体绕流：球坐标。

选择合适坐标系可以显著简化方程。

第二步：写出完整控制方程

对于不可压缩、常黏度 Newton 流体：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}.$$

不要一开始就凭记忆写简化方程。

第三步：逐条使用物理假设

常见假设包括：稳态；二维；单向流动；充分发展；轴对称；无体力；压强只沿某一方向变化。

每使用一个假设，都应该明确它消除了哪些项。

第四步：应用边界条件

典型边界条件包括：固壁无滑移；对称条件；自由表面零剪切；指定压强；指定速度。

第五步：积分求解

当偏微分方程被简化为常微分方程后，再进行积分。

第六步：计算派生量

例如：体积流量 Q ；平均速度 U_b ；最大速度 $U_{\max}$ ；壁面剪切应力 τ_w ；压降；阻力；功率耗散。

第七步：写成无量纲形式并解释物理

尽量将结果写成

$u^* = f(y^*)$ 的形式，观察：解的形状是否依赖具体参数；哪些参数只决定幅值；哪些参数决定流动形态。

💡 本章最重要的方法

不是先背解析解，而是先问：为什么这个问题可以被简化成这样？

经典解的真正价值，是训练从物理条件到数学简化的过程。

4.1.2 定常充分发展单向流的一般化简

先考虑一个无体力、恒截面的直通道，采用 x 作为流向， y 和 z 为横截面坐标。若流动稳态且只有流向速度分量，先写成

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z), 0, 0).$$

这一类问题包括后面将研究的平面 Couette 流、平面 Poiseuille 流和 Couette-Poiseuille 组合流。它们虽然边界条件和驱动方式不同，但具有共同的方程简化结构。

对于不可压缩流动，连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

由于 $v = w = 0$ ，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

于是 $u = u(y, z)$ ，速度剖面不再沿流向变化。与此同时， y 和 z 方向动量方程分别简化为

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

因此压强只能沿流向变化：

$$p = p(x).$$

x 方向 Navier-Stokes 方程中的非定常项和对流项全部消失，得到

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (4.1)$$

对于恒截面直通道，速度场只依赖横截面坐标，而压强梯度只依赖 x 。为了使上式在整个流场中同时成立，两者必须等于同一个常数。因此可以写成

$$\boxed{\mu \nabla_{\perp}^2 u = \frac{dp}{dx} = \text{常数}} \quad (4.2)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2$ 表示横截面内的 Laplace 算子。

这条方程可以看成后面若干经典解的“母方程”：

- **Couette 流：** $dp/dx = 0$ ，由运动壁面提供驱动；
- **Poiseuille 流：** $dp/dx \neq 0$ ，由压强梯度提供驱动；

定常充分发展单向流：Navier--Stokes 方程如何化简？

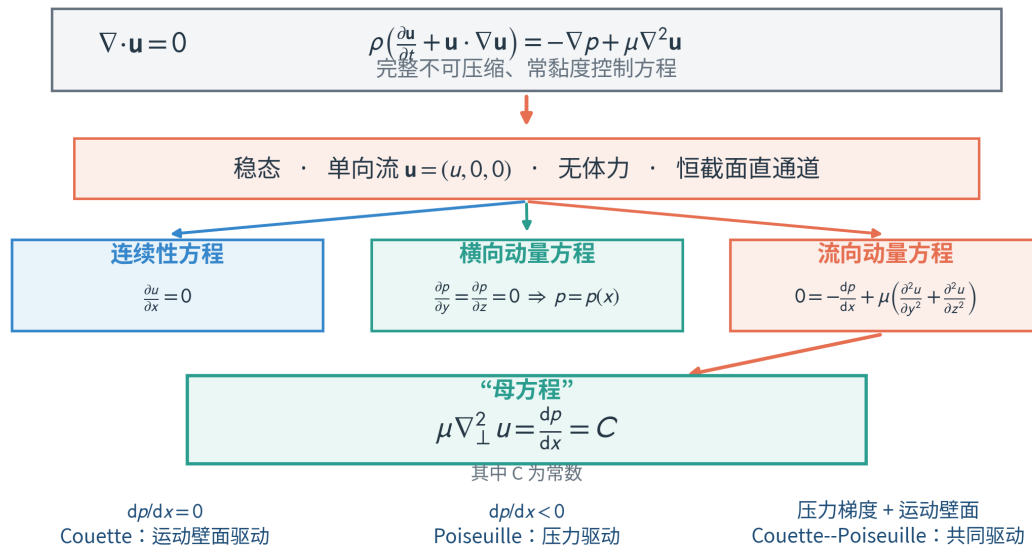


图 4.2: 从完整不可压缩 Navier–Stokes 方程到定常充分发展单向流“母方程”的逐步化简。

- **Couette–Poiseuille 流**：压强梯度与运动壁面同时存在。

i 为什么非线性项会消失？

完整 Navier–Stokes 方程仍然是非线性的。这里只是由于单向、充分发展等特殊运动学条件，使 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 恰好为零。因此，后面出现的线性叠加是特殊流动简化后的性质，不能推广到一般 Navier–Stokes 流动。

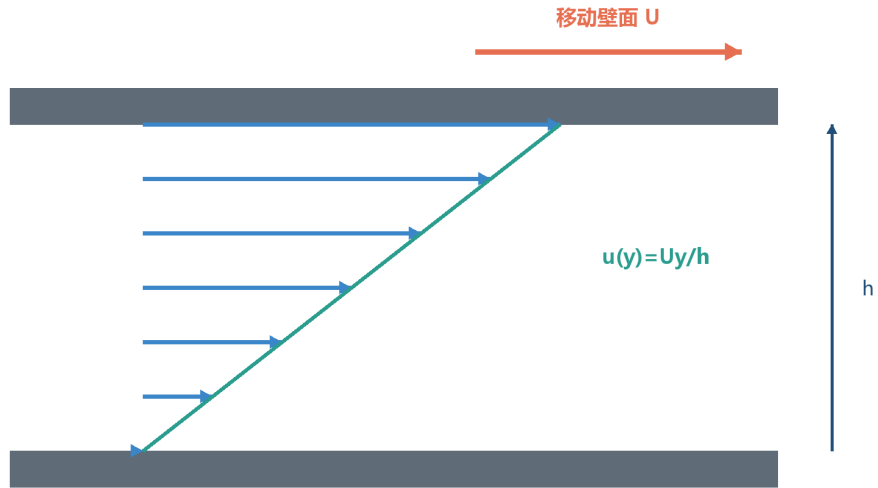
4.2 平面 Couette 流

4.2.1 物理模型

考虑两块无限大平行平板，间距为 h 。

下板位于 $y = 0$ ，静止；上板位于 $y = h$ ，以恒定速度 U 沿 x 方向运动；两板之间充满不可压缩 Newton 流体；流动达到稳态；忽略压强梯度和体力。

由于平板无限大，并且流动充分发展，可以设



压强梯度为零时，壁面运动与黏性共同建立线性速度分布

$$u = (u(y), 0, 0).$$

4.2.2 连续性方程

二维不可压缩连续性方程为 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ 。这里 $u = u(y)$ 且 $v = 0$ ，因而 $\partial u / \partial x = 0$ ，连续性方程自动满足。

4.2.3 动量方程简化

平面 Couette 流是式 4.1 的最简单特例：速度只随 y 变化，并且没有压强梯度。为了再次强化“逐项消去”的过程，下面从 x 方向方程直接展开。

x 方向 Navier-Stokes 方程为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

稳态条件使 $\partial u / \partial t = 0$ ，充分发展条件给出 $\partial u / \partial x = 0$ ，单向流动使 $v = 0$ ，而无压强梯度意味着 $\partial p / \partial x = 0$ 。逐项代入后，方程只剩 $\mu d^2 u / dy^2 = 0$ ；由于 $\mu \neq 0$ ，速度分布满足

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

4.2.4 边界条件与速度分布

无滑移条件为 $u(0) = 0$ 和 $u(h) = U$ 。对控制方程积分两次得到 $u = C_1 y + C_2$ ，再代入两端条件便有 $C_2 = 0$ 、 $C_1 = U/h$ ，于是

$$u(y) = U \frac{y}{h} \quad (4.3)$$

速度沿 y 呈线性分布。

4.2.5 剪切应力

本章所有壁面剪切均沿用第 2 章的三层记号与法向约定，不另设局部牵引定义。Newton 黏性定律给出内部应力分量 $\tau_{xy} = \mu \, du/dy$ 。将线性速度剖面代入可得

$$\tau_{xy} = \mu \frac{U}{h} \quad (4.4)$$

剪切应力在整个流体中保持常数，表明运动壁面输入的切向动量通过黏性作用传遍整个流体层，而不会只停留在壁面附近。

4.2.6 无量纲形式

以 U 和 h 分别归一化速度与法向坐标，即令 $u^* = u/U$ 、 $y^* = y/h$ ，速度剖面化为

$$u^* = y^* \quad (4.5)$$

不同 U 、 h 和 μ 的 Couette 流经过上述归一化后具有同一条速度剖面。黏度 μ 没有出现在式 4.5 中，是因为在给定两壁速度的条件下，黏度改变的是维持线性速度分布所需的剪切应力，而不是剖面的形状。

4.2.7 平均速度与流量

单位展向宽度的体积流量为

$$q = \int_0^h u(y) \, dy. \text{ 代入式 4.3:}$$

$$q = \int_0^h U \frac{y}{h} \, dy = \frac{Uh}{2}. \text{ 因此平均速度为 } U_b = q/h = U/2, \text{ 恰好等于两壁速度的算术平均值。}$$

Couette 流已经完整演示了从完整方程逐项删减到边界条件闭合的过程。后续各例不再重复完全相同的删项说明，而只突出相对于这一基准新增的驱动、坐标算子或初边条件；它们之间的对应关系汇总于表 4.1。

表 4.1: 后续典型流动相对于 Couette 完整删项示范的变化。这里 $p_x = dp/dx$, $p_z = dp/dz$ 。

流动	直接沿用的条件	相对于 Couette 流的 新增信息	简化方程与关键条件
平面 Poiseuille 流	稳态、单向、充分发展、常黏度	两壁静止, 保留恒定压强梯度	$0 = -p_x + \mu u''$; $u(\pm h) = 0$
Couette-Poiseuille 流	同上	运动壁面与压强梯度同时驱动	$0 = -p_x + \mu u''$; $u(0) = 0, u(h) = U$
圆管 Poiseuille 流	稳态、单向、充分发展、常黏度	横向 Laplace 算子改用圆柱坐标形式	$0 = -p_z + \mu r^{-1}(ru')'$; $u(R) = 0, u'(0) = 0$
重力液膜	稳态、单向、充分发展、常黏度	保留沿板重力, 另一侧为自由表面	$0 = \mu u'' + \rho g \sin \chi$; $u(0) = 0, u'(h) = 0$
Stokes 第一、第二问题	单向、常黏度、无压强梯度	保留局部非定常项, 以不同初边条件闭合	$u_t = \nu u_{yy}$; 突然启动或周期壁面条件

4.2.8 工程近似: 窄间隙旋转黏度计

Couette 流也可为经典的旋转黏度测量提供工程近似。考虑两个同轴圆柱: 内圆柱半径为 R_i , 外圆柱半径为 R_o , 有效几何高度为 H_g 。外圆柱固定, 内圆柱以角速度 Ω 旋转。有限曲率下的原问题是圆柱 Couette 流; 只有在窄间隙极限中, 才可将局部间隙近似为平面 Couette 流。

若间隙

$$\delta = R_o - R_i$$

远小于内圆柱半径,

$$\delta \ll R_i,$$

则曲率效应较弱, 局部间隙可以近似看成平面 Couette 流。内圆柱表面的切向速度为

$$U_i = \Omega R_i,$$

因此速度梯度近似为

$$\frac{du}{dy} \approx \frac{\Omega R_i}{\delta}.$$

内圆柱表面的剪切应力近似为

$$\tau_i \approx \mu \frac{\Omega R_i}{\delta}.$$

圆柱侧面的接触面积为 $2\pi R_i H_g$ ，因此黏性力矩为

$$M = \tau_i (2\pi R_i H_g) R_i.$$

代入上式得到

$$\mu \approx \frac{M\delta}{2\pi\Omega R_i^3 H_g} \quad (4.6)$$

因此，只要测量转矩 M 和角速度 Ω ，并已知装置几何尺寸，就可以反推出流体黏度。这里用 M 表示转矩，以避免与温度 T 混淆；角速度采用 Ω ，以免与第 8 章 $k-\omega$ 模型的比耗散率混淆。

同轴圆柱黏度计：精确模型与窄间隙近似

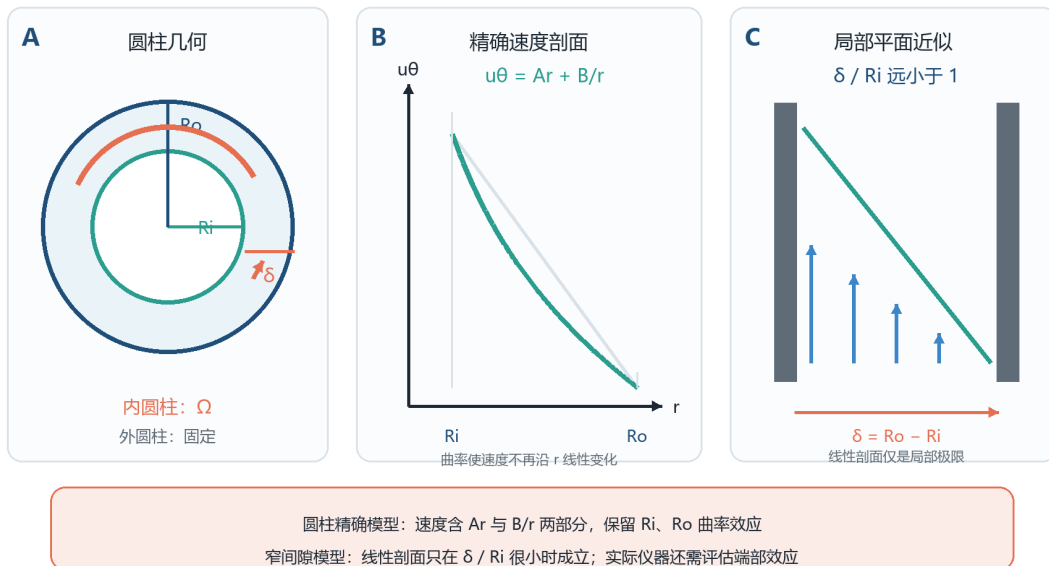


图 4.3: 窄间隙旋转黏度计的 Couette 流近似。只有当 $\delta/R_i \ll 1$ 时，圆柱间隙才能近似为平行平板间的线性剪切流。

! 圆柱 Couette 精确解与窄间隙极限

若不忽略曲率，纯旋向、稳态轴对称解具有 $u_\theta = Ar + B/r$ 的形式。对内圆柱转动、外圆柱静止的条件

$$u_\theta(R_i) = \Omega R_i, \quad u_\theta(R_o) = 0,$$

可得完整圆柱几何中的精确速度分布

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left(\frac{R_o^2}{r} - r \right). \quad (4.7)$$

由 $\tau_{r\theta} = \mu(du_\theta/dr - u_\theta/r)$ 计算内圆柱表面的剪切大小并对圆柱面取矩，得到

$$M = \frac{4\pi\mu\Omega H_g R_i^2 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2}, \quad \mu = \frac{M(R_o^2 - R_i^2)}{4\pi\Omega H_g R_i^2 R_o^2}. \quad (4.8)$$

令 $R_o = R_i + \delta$ 并取 $\delta/R_i \ll 1$, 式 4.8 才退化为式 4.6。因而后者是具有明确小参数的工程近似, 而不是任意间隙下的圆柱精确解; 实际仪器还需另行评估端部效应。

4.3 平面 Poiseuille 流

4.3.1 物理模型

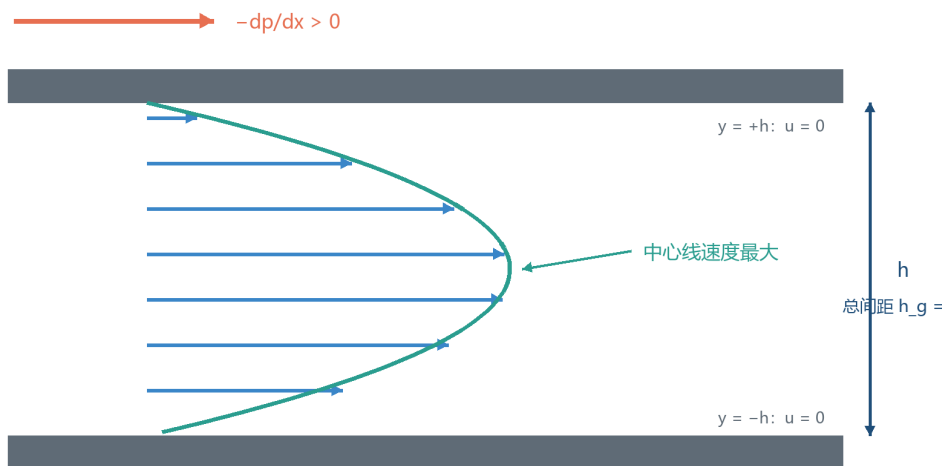
考虑两块静止的无限大平行平板, 两板位于

$y = -h$ 和 $y = h$. 流体在压强梯度作用下沿 x 方向运动。

⚠ 几何约定: h 是半间距

本节始终用 h 表示中心线到任一壁面的距离, 因此两平板的总间距记为 $h_g = 2h$ 。若其他教材以总间距建立公式, 比较系数前应先代入 $h = h_g/2$; 否则流量中的三次方会造成显著的常数因子错误。符号 H 在本书中保留给边界层形状因子。

设流体不可压缩且服从 Newton 黏性定律, 并假定流动稳态、二维、充分发展、单向且可忽略体力。速度



两壁无滑移, 压强梯度驱动抛物线速度剖面

场于是可写成 $u = (u(y), 0, 0)$ 。

4.3.2 控制方程

按照表 4.1, 平面 Poiseuille 流沿用 Couette 流的稳态、单向和充分发展条件, 只把驱动改为恒定压强梯度并令两壁静止; 连续性方程仍自动满足。

x 方向动量方程简化为

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (4.9)$$

由于流动充分发展， dp/dx 只能是常数。

通常压强沿流动方向降低：

$$\frac{dp}{dx} < 0.$$

4.3.3 速度分布

将式 4.9 写为

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \text{ 积分两次:}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2. \text{ 两壁无滑移:}$$

$$u(-h) = 0, u(h) = 0. \text{ 由对称性也可直接知道:}$$

$$C_1 = 0. \text{ 最终得到}$$

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2) \quad (4.10)$$

因为

$$\frac{dp}{dx} < 0, \text{ 所以 } u > 0.$$

4.3.4 最大速度

中心线 $y = 0$ 处速度最大：

$$U_{\max} = u(0) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (4.11)$$

以中心线最大速度为尺度，可将速度写成 $u = U_{\max}[1 - (y/h)^2]$ 。若再令 $y^* = y/h$ ，无量纲形式为

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - y^{*2}$$

不同压强梯度、黏度和通道宽度下的平面 Poiseuille 流，在归一化后具有同一个抛物线剖面。

4.3.5 单位宽度流量

单位展向宽度流量:

$q = \int_{-h}^h u(y) dy$. 代入速度分布:

$$q = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_{-h}^h (h^2 - y^2) dy.$$

计算得到

$$q = -\frac{2h^3}{3\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.12)$$

4.3.6 平均速度

以总间距 $2h$ 除单位展向宽度流量, 平均速度 $U_b = q/(2h)$ 为

$$U_b = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.13)$$

比较式 4.11 与式 4.13:

$$U_{\max} = \frac{3}{2} U_b$$

这是平面 Poiseuille 流的重要关系。

4.3.7 剪切应力分布

速度梯度为 $du/dy = (y/\mu) dp/dx$ 。将其代入 Newton 黏性定律 $\tau_{xy} = \mu du/dy$, 可得

$$\tau_{xy} = \frac{dp}{dx} y \quad (4.14)$$

内部剪切应力随 y 线性变化, 中心线满足 $\tau_{xy}(0) = 0$ 。若 $dp/dx < 0$, 上壁 $y = h$ 处 $\tau_{xy} < 0$, 下壁 $y = -h$ 处 $\tau_{xy} > 0$; 但流体域外法向分别为 $n_f = +e_y$ 和 $-e_y$, 所以两侧壁面对流体的切向牵引都沿负 x 方向。两壁剪切大小相同, 均为

$$|\tau_w| = -h \frac{dp}{dx}.$$

对称通道中心线处速度梯度和剪切应力为零, 壁面处的剪切大小最大; 内部应力分量的符号和壁面牵引方向必须通过法向联系起来。

4.3.8 完整例题：用 Poiseuille 解析解验证离散程序

考虑无量纲边值问题

$$\frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} = -2, \quad u^*(-1) = u^*(1) = 0,$$

其解析解为 $u^* = 1 - y^{*2}$ 。将区间 $[-1, 1]$ 等分为 N 个网格单元，令 $\Delta y^* = 2/N$ ，在内部节点采用二阶中心差分：

$$\frac{u_{j+1}^* - 2u_j^* + u_{j-1}^*}{(\Delta y^*)^2} = -2, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (4.15)$$

连同两端 Dirichlet 条件，这形成一个三对角线性方程组。求得数值解后，可用

$$E_\infty = \max_j |u_j^{*,\text{num}} - u_j^{*,\text{exact}}|, \quad E_2 = \left[\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N (u_j^{*,\text{num}} - u_j^{*,\text{exact}})^2 \right]^{1/2}$$

检查速度误差。由于中心二阶差分能精确表示二次多项式的二阶导数，式 4.15 在均匀网格上的节点解应与 $1 - y^{*2}$ 一致到舍入误差。这是对源项符号、边界条件和线性求解器的有力检查，但不能单凭这个结果宣称程序具有二阶收敛性，因为该测试恰好落在离散算子的精确多项式空间内。

再用上壁的一阶后向差分检验派生量。解析壁面梯度为 $(du^*/dy^*)_{y^*=1} = -2$ ，数值近似则为

$$\left. \frac{du^*}{dy^*} \right|_1 \approx \frac{u_N^* - u_{N-1}^*}{\Delta y^*} = -2 + \Delta y^*.$$

因此壁面剪切大小的相对误差为 $\Delta y^*/2 = 1/N$ ：

表 4.2: Poiseuille 验证算例中一阶壁面梯度的网格收敛。

N	Δy^*	壁面梯度相对误差	相邻网格观测阶 p
8	0.25	12.5%	—
16	0.125	6.25%	1.00
32	0.0625	3.125%	1.00
64	0.03125	1.5625%	1.00

这个结果把“解对了”和“派生量也按预期收敛”区分开来。若要验证二阶壁面梯度格式，应改用相应的二阶单边差分；若要检验内部离散算子的二阶收敛阶，则可采用非二次制造解。有限体积程序也可使用同一思路，将单元中心速度插值到共同位置后比较 E_2 、 E_∞ ，并单独检查流量和壁面剪切。

4.4 Couette–Poiseuille 组合流

4.4.1 为什么研究组合流

真实问题中，流动可能同时受到多种驱动力作用。

例如：壁面运动推动流体；压强梯度同时推动或阻碍流动。

由于式 4.1 在给定常黏度条件下是线性的，因此这两种效应可以叠加。

这提供了一个很重要的认识：

虽然完整 Navier–Stokes 方程是非线性的，但在某些特殊流动中，经过物理简化以后，控制方程可能重新变为线性。

4.4.2 物理模型

考虑两平行板：下壁 $y = 0$ 静止；上壁 $y = h$ 以速度 U 沿 x 方向运动；同时存在恒定压强梯度 dp/dx 。

与表 4.1 对照可见，这一问题不需要重新执行一遍 Couette 的逐项删项；它与平面 Poiseuille 流共享同一常微分方程，只改变两壁速度条件。

仍设

$u = (u(y), 0, 0)$. 控制方程为

$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$. 边界条件：

$u(0) = 0, u(h) = U$.

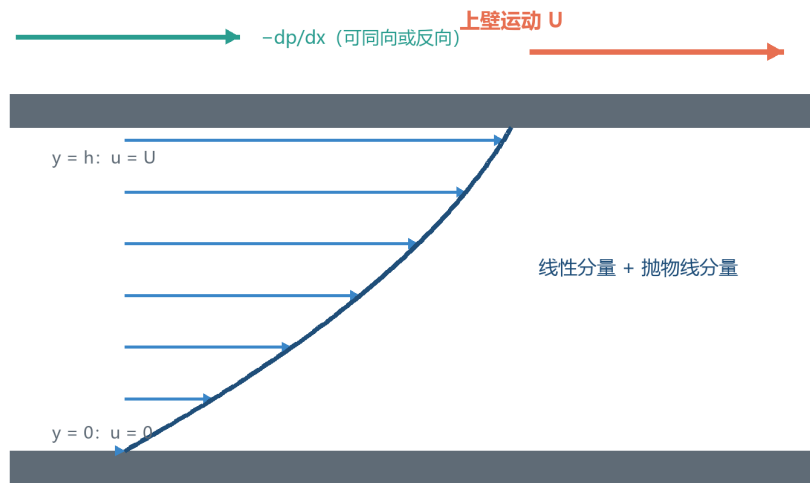
4.4.3 速度分布

积分得到

$$u(y) = U \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y) \quad (4.16)$$

第一项 Uy/h 是运动壁面产生的 Couette 分量，第二项 $-(2\mu)^{-1}(dp/dx)y(h-y)$ 是压强梯度产生的 Poiseuille 分量。控制方程的线性使两种驱动可以直接叠加，即

$$u = u_{\text{Couette}} + u_{\text{Poiseuille}}$$



壁面剪切驱动与压强驱动的线性叠加

图 4.4: Couette–Poiseuille 组合流的统一几何示意：上壁运动与压强梯度共同作用，速度剖面由线性 Couette 分量和抛物线 Poiseuille 分量叠加而成。

4.4.4 有利压梯与不利压梯

当 $dp/dx < 0$ 时，压强沿 x 方向降低，压强梯度与上壁运动共同推动流动；当 $dp/dx > 0$ 时，压强梯度则阻碍壁面驱动。后一种作用足够强时，靠近下壁的流体甚至会反向运动。因此局部速度方向并不只由运动壁面的方向决定，而取决于壁面剪切与压强驱动之间的竞争。

4.4.5 流量

单位宽度流量：

$$q = \int_0^h u(y) dy.$$

对两部分速度分别积分，得到

$$q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.17)$$

同样可以看成：

$q = q_{\text{Couette}} + q_{\text{Poiseuille}}$ ，如果要求净流量为零：

$q = 0$ ，可以反求所需压强梯度。

这种“运动壁面推动 + 压强反向抵消”的情形在润滑流动和输运问题中很常见。

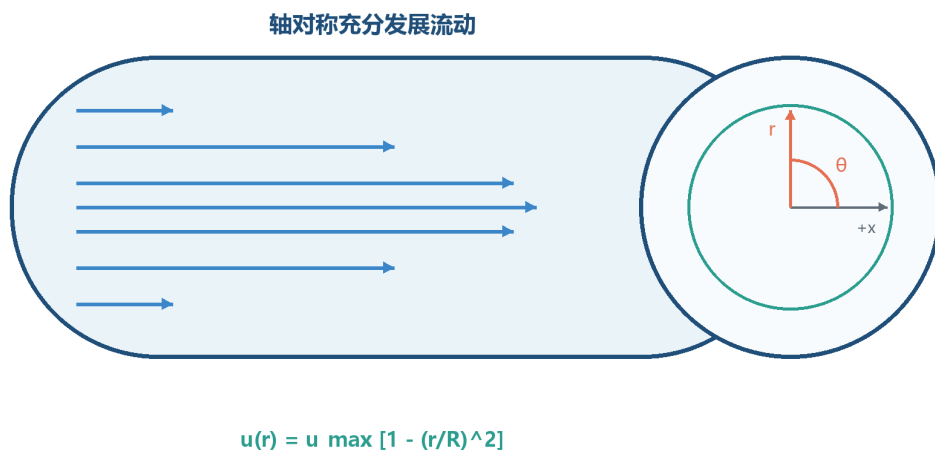
4.5 Hagen-Poiseuille 圆管流

4.5.1 物理模型

考虑半径为 R 的圆形直管。

采用圆柱坐标：

(r, θ, z) . 在横截面内选定 $+x$ 为角度零点, θ 按绕 $+z$ 轴的右手方向增大。设不可压缩 Newton 流体在管内作稳态、轴对称、充分发展的单向流动, 并令压强只沿 z 方向变化。由于轴对称, 所有量都不显含 θ ; 径向和旋向速度均为零, 速度场可写成 $u_r = u_\theta = 0$ 、 $u_z = u(r)$ 。



4.5.2 控制方程

这一问题沿用表 4.1 中的稳态、单向和充分发展条件; 与平面通道相比, 真正新增的步骤是把横截面黏性算子写成圆柱坐标形式。轴向 Navier-Stokes 方程简化为

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (4.18)$$

移项并除以黏度后得到

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}.$$

4.5.3 速度分布

两边乘以 r :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{dp}{dz}.$$

积分：

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1.$$

除以 r 后，速度梯度为

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r + \frac{C_1}{r}.$$

为了使 $r = 0$ 处速度梯度保持有限，必须有

$C_1 = 0$. 再次积分：

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_2.$$

壁面无滑移：

$$u(R) = 0.$$

最终得到

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (4.19)$$

4.5.4 最大速度

管轴中心 $r = 0$ 处：

$$U_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}.$$

以 $U_{\max}$ 归一化后，速度剖面成为

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (4.20)$$

圆管层流同样具有抛物线速度剖面。

4.5.5 体积流量

体积流量为

$$Q = \int_A u \, dA.$$

轴对称情况下：

$dA = 2\pi r \, dr$ ，所以体积流量可写成 $Q = 2\pi \int_0^R u(r) r \, dr$ 。代入速度分布得到

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr.$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (4.21)$$

若管长为 L ，入口与出口压差为

$$\Delta p = p_{\text{in}} - p_{\text{out}} > 0,$$

则 $-dp/dz = \Delta p/L$, 从而

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (4.22)$$

这就是 Hagen-Poiseuille 定律。

4.5.6 为什么 $Q \propto R^4$ 很重要

Hagen-Poiseuille 定律最显著的特征之一是 $Q \propto R^4$ 。在其他条件不变时, 半径增至原来的 2 倍会使体积流量增至 $2^4 = 16$ 倍, 因此管径的微小变化就可能显著改变输运能力。这一强烈的几何敏感性在微流道、毛细管、生物流动、管网设计和多孔介质等效流动中都很重要。

4.5.7 平均速度

截面平均速度定义为 $U_b = Q/(\pi R^2)$ 。代入体积流量表达式可得

$$U_b = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (4.23)$$

再与 $U_{\text{max}} = -(R^2/4\mu) dp/dz$ 比较, 可得

$$U_{\text{max}} = 2U_b \quad (4.24)$$

4.5.8 剪切应力

由速度分布有 $du/dr = (r/2\mu) dp/dz$ 。代入 $\tau_{rz} = \mu du/dr$, 得到

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \quad (4.25)$$

剪切应力从中心的零值线性增加到壁面最大值。

壁面剪切应力大小:

$|\tau_w| = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dz}$. 若用管径 $D = 2R$, 这里普通斜体 D 表示直径, 与粗体变形率张量 D 区分:

$$|\tau_w| = \frac{D}{4} \frac{\Delta p}{L}$$

4.6 圆管层流的摩擦关系

虽然本章重点是精确解，但 Hagen–Poiseuille 解可以进一步导出经典的层流摩擦系数。

采用 Darcy 摩擦系数 f_D ，定义

$$\frac{\Delta p}{L} = f_D \frac{\rho U_b^2}{2D}. \quad (4.26)$$

Hagen–Poiseuille 关系给出 $U_b = (R^2/8\mu)(\Delta p/L) = (D^2/32\mu)(\Delta p/L)$ ，即 $\Delta p/L = 32\mu U_b/D^2$ 。将它与式 4.26 对比，有

$$f_D \frac{\rho U_b^2}{2D} = \frac{32\mu U_b}{D^2}.$$

整理后得到

$$f_D = \frac{64}{Re_D} \quad (4.27)$$

其中 $Re_D = \rho U_b D/\mu$ 。这一无量纲结果表明，在上述充分发展层流假设下，圆管摩擦系数由 Reynolds 数唯一确定。

⚠ 注意 Darcy 与 Fanning 摩擦系数

工程文献中还常见 Fanning 摩擦系数 f_F ，满足

$f_D = 4f_F$ 。因此层流圆管中

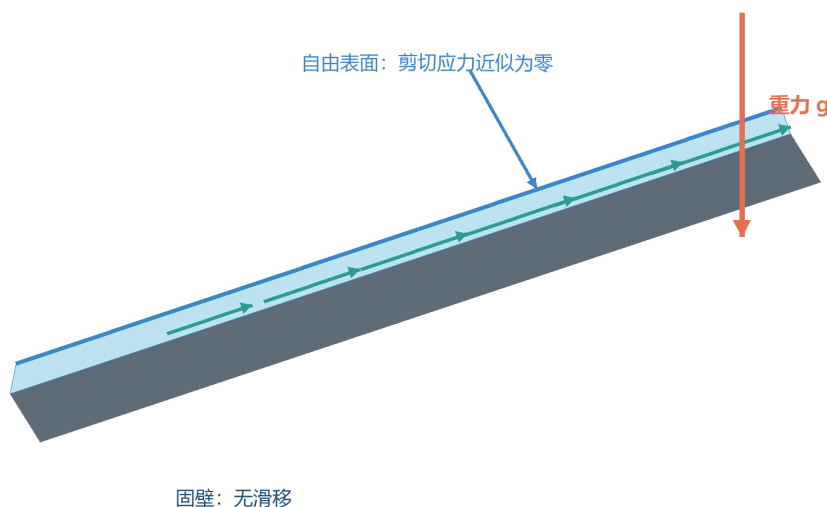
$f_F = \frac{16}{Re_D}$ 。使用经验公式时必须明确采用哪一种摩擦系数定义。

4.7 重力驱动薄液膜

4.7.1 物理模型

考虑一层 Newton 流体沿倾斜平板向下流动。

取 x 轴沿平板向下， y 轴垂直平板；固壁位于 $y = 0$ ，自由表面位于 $y = h$ ，平板与水平面的夹角为 χ 。假定流动稳态、二维、充分发展，并忽略自由表面上的气体剪切，速度场可写成 $u = (u(y), 0, 0)$ ，重力沿板方向的分量为 $g \sin \chi$ 。倾角采用 χ ，以避免与热扩散率 α 混淆。



4.7.2 控制方程

按照表 4.1，本节只需在平面单向流母方程中保留沿板重力，并以自由表面条件替代第二个固壁条件。沿 x 方向有

$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \chi$. 若自由表面暴露于均匀大气压，并忽略沿流向的表面曲率变化，则可取

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

控制方程因而化为 $\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \chi = 0$ ，也就是

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \chi}{\mu}.$$

4.7.3 边界条件

固壁无滑移:

$u(0) = 0$. 若自由表面上的气体剪切可以忽略，则切向应力 $\tau_{xy}(h) = 0$. 由于黏度非零，这一条件等价于

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0.$$

4.7.4 速度分布

积分:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g \sin \chi}{\mu} y + C_1. \text{ 由自由表面零剪切:}$$

$C_1 = \frac{\rho g \sin \chi}{\mu} h$. 再次积分:

$u = \frac{\rho g \sin \chi}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + C_2$. 由固壁无滑移:

$$C_2 = 0.$$

两个边界条件共同确定速度分布为

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \chi}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (4.28)$$

4.7.5 最大速度和流量

自由表面 $y = h$ 处速度最大:

$U_{\max} = \frac{\rho g h^2 \sin \chi}{2\mu}$. 单位宽度流量:

$$q = \int_0^h u(y) dy.$$

积分得到

$$q = \frac{\rho g h^3 \sin \chi}{3\mu} \quad (4.29)$$

平均速度为 $U_b = q/h = \rho g h^2 \sin \chi / (3\mu)$, 与最大速度的关系为

$$U_{\max} = \frac{3}{2} U_b$$

4.7.6 与 Poiseuille 流的比较

平面 Poiseuille 流由压强梯度驱动, 两侧固壁都满足无滑移条件, 因此最大速度位于中心线; 重力驱动液膜则由沿板重力驱动, 一侧为固壁, 另一侧为零剪切自由表面, 最大速度相应移到自由表面。两者的控制方程形式相近, 速度分布却因边界条件不同而具有不同的形状和极值位置。

4.8 Stokes 第一问题：突然启动平板

4.8.1 物理模型

考虑占据

$y > 0$ 半空间的不可压缩 Newton 流体。

初始时刻:

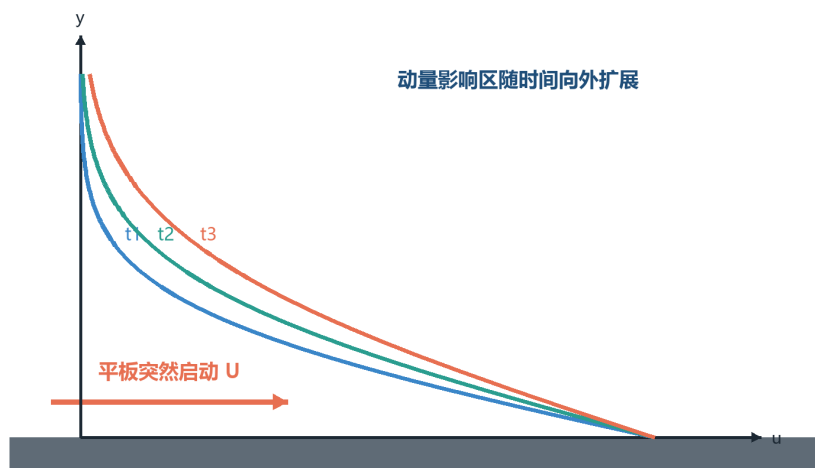
$t < 0$, 流体与平板都静止。

在

$t = 0$ 时, 位于

$y = 0$ 的无限大平板突然开始以恒定速度 U 沿 x 方向运动。

由于平板无限大, 流动只依赖于 y 和 t :



$$u = (u(y, t), 0, 0).$$

4.8.2 控制方程

这是表 4.1 中的非定常分支: 空间结构仍使对流项为零, 但现在保留局部非定常项。由于 $u = u(y, t)$ 且 $v = 0$, 有 $\partial u / \partial x = 0$; 若无压强梯度, x 方向 Navier-Stokes 方程化为

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

除以密度后便得到一维动量扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.30)$$

方程的形式与热扩散方程相同: 运动黏度 ν 控制壁面动量向流体内部传播的速率, 这与第 1 章建立的动量扩散图像一致。

4.8.3 初始条件与边界条件

初始条件:

$$u(y, 0) = 0, \quad y > 0. \text{ 壁面无滑移:}$$

$$u(0, t) = U, \quad t > 0. \text{ 远场条件:}$$

$$u(y, t) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

4.8.4 相似变量

方程中只有：距离 y ；时间 t ；运动黏度 ν 。

由量纲可以构造无量纲变量：

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}. \text{ 精确解为}$$

$$\frac{u}{U} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad (4.31)$$

其中 $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$ 为余误差函数。

4.8.5 动量扩散厚度

从相似变量可以立即看到，速度发生显著变化的典型距离满足

$y \sim \sqrt{\nu t}$. 因此可以定义一个数量级上的黏性影响厚度：

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} \quad (4.32)$$

时间越长，壁面影响传播得越远；运动黏度越大，动量扩散也越快。影响厚度按 $\sqrt{t}$ 而不是 t 增长，这与第 3 章由量纲分析得到的扩散长度标度一致。

4.8.6 壁面剪切应力随时间的变化

这里先计算流体内部的壁面应力分量 $\tau_{xy,w} = \mu(\partial u / \partial y)_{y=0}$ 。对式 4.31 求导可得

$$\tau_{xy,w} = -\frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}} \quad (4.33)$$

由于物体表面指向流体的法向为 $n_b = +e_y$ ，负的 $\tau_{xy,w}$ 对应流体作用于平板的切向牵引沿负 x 方向；壁面对流体的牵引则方向相反。这里的符号判断直接回指第 2 章约定。

壁面剪切大小满足 $|\tau_w| = \mu U / \sqrt{\pi \nu t} \propto t^{-1/2}$ 。

平板刚启动时，速度变化集中在极薄区域，壁面梯度和剪切应力都很大；随后动量扩散到更厚的流体层，壁面梯度随之减小，剪切应力按 $t^{-1/2}$ 衰减。

4.8.7 Stokes 第一问题的物理意义

Stokes 第一问题的意义不只在得到一个误差函数解。控制方程 $\partial u/\partial t = \nu \partial^2 u/\partial y^2$ 与热扩散方程同形，说明壁面输入的动量需要有限时间才能向外传播；其影响范围满足 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ ，体现典型的扩散标度。虽然这里没有外部对流，壁面作用集中在一层逐渐扩展区域内的图像，已经为第 6 章的边界层思想提供了直觉基础。

4.9 拓展：Stokes 第二问题

i 拓展内容

本节可根据课堂进度选讲，不作为后续章节的必要前置知识。

4.9.1 振荡平板

Stokes 第二问题与第一问题共享表 4.1 中的同一个动量扩散方程，区别只在壁面运动由阶跃启动改为周期强迫。考虑半无限流体 $y > 0$ ，平板位于 $y = 0$ ，并作简谐运动：

$u(0, t) = U_0 \cos \Omega t$. 远场：

$u(y, t) \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$. 控制方程仍为

$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 稳定周期解为

$$u(y, t) = U_0 e^{-y/\delta_s} \cos\left(\Omega t - \frac{y}{\delta_s}\right) \quad (4.34)$$

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}} \quad (4.35)$$

δ_s 称为 Stokes 层厚度或黏性穿透深度。

4.9.2 物理解读

振荡扰动离开壁面后，振幅按指数衰减，相位则逐渐滞后。由于 $\delta_s \propto \sqrt{\nu/\Omega}$ ，较大的黏度会扩大振荡影响范围，较高的频率则把扰动限制在更薄的近壁区域。这是非定常黏性层中扩散时间与强迫周期竞争的典型表现。

4.10 典型精确解之间的比较

为避免把方程、边界、剖面、流量和剪切全部压入同一张密集表，稳态问题先比较“如何定义”，再比较“解给出什么”；非定常 Stokes 问题另列一表。各表沿用相关小节已经定义的坐标和几何尺度，

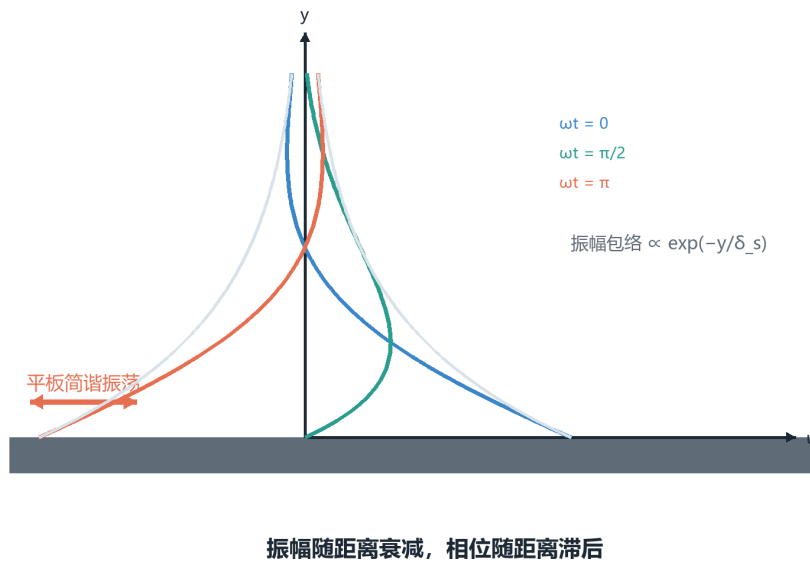


图 4.5: Stokes 第二问题的振荡速度剖面：壁面作简谐运动，速度振幅随 y 指数衰减，同时相位逐渐滞后。

并记 $p_x = dp/dx$ 、 $p_z = dp/dz$ 。平面流动的 q 表示单位展向宽度流量，圆管流用体积流量 Q 。

表 4.3: 稳态充分发展流动的驱动、简化方程与边界条件。

流动	外部驱动	简化方程	关键边界条件
Couette 流	上壁以速度 U 运动	$\mu u'' = 0$	$u(0) = 0, u(h) = U$
平面 Poiseuille 流	恒定压强梯度 $p_x < 0$	$0 = -p_x + \mu u''$	$u(\pm h) = 0, h_g = 2h$
Couette–Poiseuille 流	运动壁面与恒定 p_x	$0 = -p_x + \mu u''$	$u(0) = 0, u(h) = U$
圆管 Poiseuille 流	恒定压强梯度 $p_z < 0$	$0 = -p_z + \mu r^{-1}(ru')'$	$u(R) = 0, u'(0) = 0$
重力液膜	沿板重力 $g \sin \chi$	$\mu u'' + \rho g \sin \chi = 0$	$u(0) = 0, u'(h) = 0$

表 4.4: 稳态充分发展流动的解析结果、剪切特征与能量输入。

流动	速度剖面	流量	剪切特征与机械能输入
Couette 流	$u = Uy/h$	$q = Uh/2$	$\tau = \mu U/h$ 为常数；运动壁面做功
平面 Poiseuille 流	$u = -p_x(h^2 - y^2)/(2\mu)$	$q = -2h^3 p_x/(3\mu)$	$ \tau_w = h(-p_x)$ ；压强做功
Couette–Poiseuille 流	$u = Uy/h + p_x(y^2 - hy)/(2\mu)$	$q = Uh/2 - h^3 p_x/(12\mu)$	$\tau(0), \tau(h) = \mu U/h \mp h p_x/2$ ；壁面与压强共同做功
圆管 Poiseuille 流	$u = -p_z(R^2 - r^2)/(4\mu)$	$Q = -\pi R^4 p_z/(8\mu)$	$ \tau_w = R(-p_z)/2$ ；压强做功

流动	速度剖面	流量	剪切特征与机械能输入
重力液膜	$u = (\rho g \sin \chi / \mu)(hy - y^2/2)$	$q = \rho gh^3 \sin \chi / (3\mu)$	固壁剪切大小为 $\rho gh \sin \chi$, 自由表面剪切为零; 重力做功

Couette-Poiseuille 流一行中的 y 依次对应 $y = 0$ 和 $y = h$ 。表中剪切应力给出流体内部的 $\tau = \mu \partial u / \partial y$ 或相应径向表达; 若讨论“壁面对流体的牵引力”, 必须结合外法向判断方向, 统一遵循第 2 章的壁面剪切符号约定。

表 4.5: Stokes 非定常黏性扩散问题的比较, 其中 $\delta_s = \sqrt{2\nu/\Omega}$ 。

问题	控制方程与初边条件	速度解	输运特征与主要平衡
Stokes 第一问题	$u_t = \nu u_{yy}; u(y, 0) = 0, u(0, t) = U, u(\infty, t) = 0$	$u/U = \operatorname{erfc}[y/(2\sqrt{\nu t})]$	$q = 2U\sqrt{\nu t/\pi}; \tau_w = \mu U/\sqrt{\pi\nu t}$; 局部惯性与黏性扩散
Stokes 第二问题	$u_t = \nu u_{yy}; u(0, t) = U_0 \cos \Omega t, u(\infty, t) = 0$	$u = U_0 e^{-y/\delta_s} \cos(\Omega t - y/\delta_s)$	净时间平均流量为零; 剪切振幅为 $\mu U_0 \sqrt{\Omega/\nu}$; 局部惯性与黏性扩散

这些解虽然形式不同, 却都表明边界条件和外部驱动力通过黏性作用共同塑造速度分布。从动量角度看, 外部驱动决定动量如何进入流体; 从能量角度看, 维持稳态黏性流动还需要持续输入机械功, 而这部分机械能最终通过黏性耗散转化为内能。后者将在 4.13 节具体讨论。

4.11 压强梯度、黏性应力与流量之间的关系

在压强驱动的充分发展流动中, 经常出现类似结构:

压强梯度 $\longleftrightarrow$ 黏性扩散. 例如平面 Poiseuille 流:

$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$. 圆管流:

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

压强梯度沿流向持续输入动量, 黏性再把这部分动量输运到壁面, 最终由壁面剪切承担相应的动量通量。稳态充分发展流动之所以能够维持, 正是因为压强驱动与黏性输运达到平衡。

4.12 壁面剪切与整体动量平衡

以圆管流为例。

取长度为 L 、半径为 R 的圆柱形控制体。

入口与出口压强产生的净推动力为 $F_p = \Delta p \pi R^2$ ，壁面剪切阻力为 $F_\tau = |\tau_w| 2\pi RL$ 。充分发展稳态条件要求两者平衡，因此 $\Delta p \pi R^2 = |\tau_w| 2\pi RL$ ，整理后得到

$$|\tau_w| = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{L}.$$

这一结果与从速度梯度直接计算得到的壁面剪切应力完全一致。

这个例子说明：

同一个关系既可以从局部微分方程得到，也可以从整体控制体动量平衡得到。

这两种方法应该相互验证。

4.13 功率输入与黏性耗散

前面主要从动量平衡角度理解经典黏性流动。本节进一步从机械能平衡角度考察同样的问题。

对于不可压缩 Newton 流体，黏性应力会把有序的机械能不可逆地转化为内能。对于本章的一维平行流 $u = (u(y), 0, 0)$ ，单位体积流体中的黏性耗散率可以写成

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (4.36)$$

其中 Φ 的量纲为 W/m^3 。

4.13.1 Couette 流：壁面做功等于黏性耗散

对于平面 Couette 流，速度及其梯度分别为

$$u(y) = U \frac{y}{h},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h},$$

所以单位体积黏性耗散率为

$$\Phi = \mu \frac{U^2}{h^2}.$$

在两壁之间对 y 积分，可得单位壁面面积对应流体层中的总黏性耗散功率：

$$\int_0^h \Phi \, dy = \mu \frac{U^2}{h}.$$

另一方面，运动上壁维持速度 U 所需的单位面积机械功率为

$$\mathcal{P}_A = \tau_w U.$$

Couette 流的剪切应力为

$$\tau_w = \mu \frac{U}{h},$$

相应的壁面功率为

$$\mathcal{P}_A = \mu \frac{U^2}{h}.$$

壁面功率与流体层中的耗散积分相等，即

$$\boxed{\tau_w U = \int_0^h \Phi \, dy} \quad (4.37)$$

等式两端相等表明，在稳态 Couette 流中，运动壁面持续输入的机械功恰好补偿流体内部的黏性耗散。

4.13.2 Poiseuille 流：压强做功等于黏性耗散

对于平面 Poiseuille 流，定义

$$G \equiv -\frac{dp}{dx} > 0.$$

速度分布及其梯度分别为

$$u(y) = \frac{G}{2\mu}(h^2 - y^2).$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{G}{\mu}y,$$

因而黏性耗散率为

$$\Phi = \frac{G^2}{\mu}y^2.$$

在两壁之间积分：

$$\int_{-h}^h \Phi dy = \frac{2G^2 h^3}{3\mu}.$$

而平面 Poiseuille 流的单位展向宽度流量为

$$q = \frac{2Gh^3}{3\mu}.$$

因此压强功率输入与黏性耗散满足

$$Gq = \int_{-h}^h \Phi dy \quad (4.38)$$

其中 Gq 表示单位流向长度、单位展向宽度上的压强功率输入。

所以，在稳态压强驱动流中，压强场持续输入的机械功恰好补偿黏性耗散。

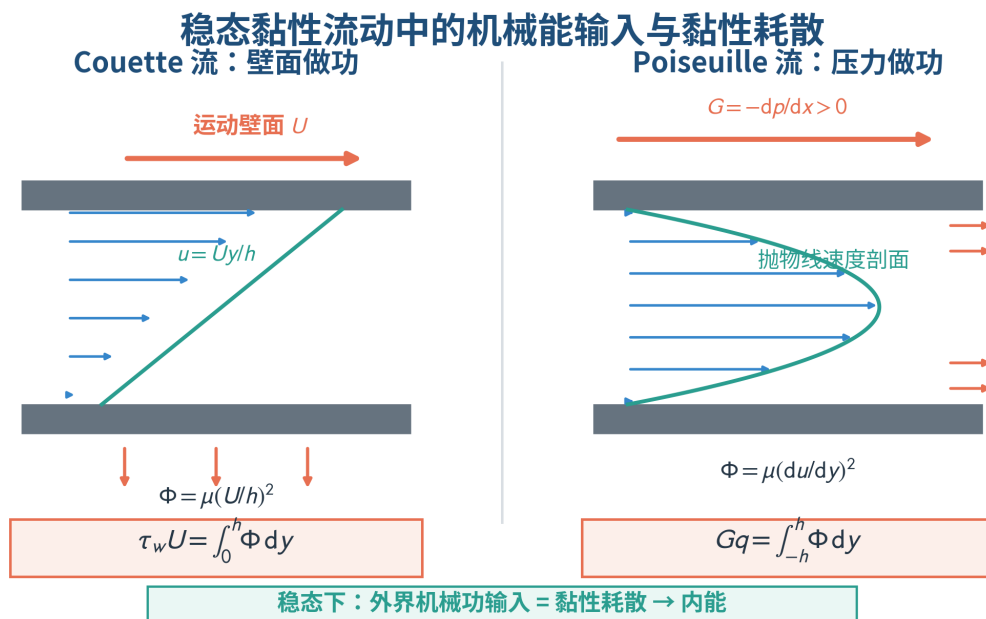


图 4.6: Couette 流与 Poiseuille 流中的机械功输入和黏性耗散。两种流动的驱动机制不同，但稳态下都满足“外界机械功输入 = 黏性耗散”。

4.13.3 统一的物理图像

Couette 流和 Poiseuille 流分别展示了两种典型的机械能输入方式：

运动壁面做功 → 黏性耗散，

压强场做功 $\rightarrow$ 黏性耗散.

因此, 可以把本章稳态黏性流动的能量图像概括为

外界持续输入机械能 $\rightarrow$ 维持黏性流动 $\rightarrow$ 黏性耗散 $\rightarrow$ 内能

这与第 1 章所强调的认识一致: 黏性不仅负责动量输运, 也会不可逆地耗散机械能。

4.14 拓展教学路线: Couette 流中的黏性耗散与温升

i 拓展教学路线 (32 学时课程可跳过)

本节用于说明“机械能耗散为内能”在温度场中的直接表现, 并作为不可压缩非等温流动的局部拓展。32 学时课程可整体跳过本节而直接进入 4.15 节; 它不是后续章节的必要前置知识, 也不意味着本书将系统展开完整传热学。

4.14.1 能量方程

继续考虑两平行板之间的 Couette 流。设流体不可压缩, μ 、 k_T 为常数, 温度仅沿法向 y 变化, 并忽略体积热源。这里 k_T 表示导热系数, 与湍动能 k 区分。稳态能量方程简化为

$$k_T \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0. \quad (4.39)$$

第二项就是前一节讨论的黏性耗散。Couette 速度剖面及其梯度为

$$u(y) = U \frac{y}{h},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h},$$

代入能量方程可得

$$k_T \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \frac{U^2}{h^2} = 0.$$

若两壁温度分别为

$$T(0) = T_w, \quad T(h) = T_e,$$

积分两次得到

$$T(y) = T_w + (T_e - T_w)\frac{y}{h} + \frac{\mu U^2}{2k_T} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (4.40)$$

这个结果包含两个物理来源：

1. $T_w + (T_e - T_w)y/h$ ：由两壁温差产生的线性导热部分；
2. $(\mu U^2/2k_T)(y/h)(1 - y/h)$ ：由黏性耗散产生的额外温升。

4.14.2 忽略黏性耗散时

当 $T_e \neq T_w$ 时，可以用黏性加热与壁面温差导热的相对强弱定义 Brinkman 数

$$Br = \frac{\mu U^2}{k_T |T_e - T_w|}.$$

当

$$Br \ll 1,$$

黏性耗散对温度场的影响可以忽略，此时式 4.40 退化为

$$T(y) \approx T_w + (T_e - T_w)\frac{y}{h}.$$

此时温度在两壁之间呈线性分布。

4.14.3 两壁温度相等时

更有启发性的情形是

$$T_w = T_e = T_0.$$

这时虽然两壁之间没有外加温差，但式 4.40 仍给出

$$T - T_0 = \frac{\mu U^2}{2k_T} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (4.41)$$

温度呈抛物线分布，最大值位于

$$y = \frac{h}{2},$$

且

$$T_{\max} - T_0 = \frac{\mu U^2}{8k_T} \quad (4.42)$$

Couette 流中的黏性耗散与温升

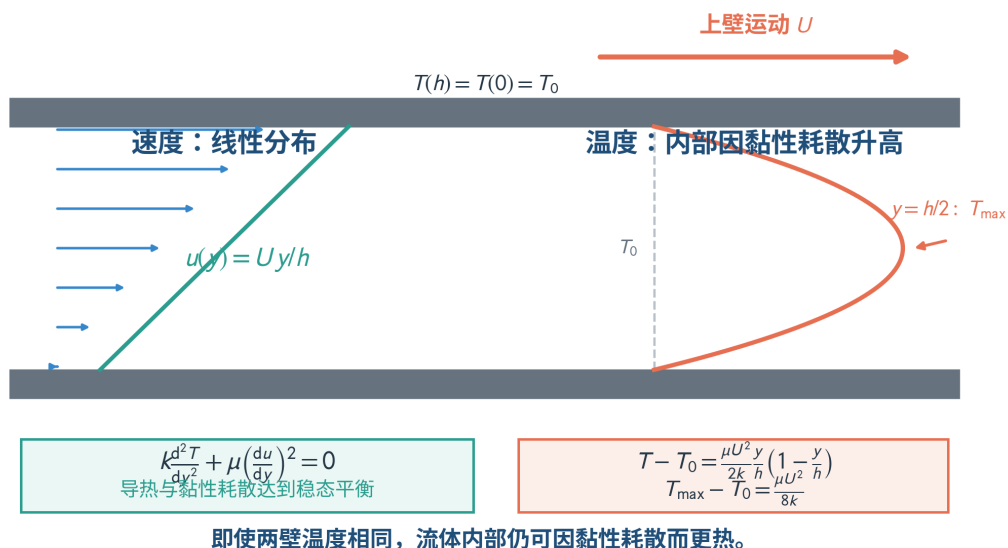


图 4.7: 两壁温度相等时的 Couette 流。速度仍为线性分布，但黏性耗散使流体内部温度高于两壁，并在中间位置达到最大值。

这个结果非常重要：

即使两壁温度完全相同，流体内部仍可因为黏性耗散而比两壁更热。

这正是“机械能不可逆地转化为内能”在温度场中的直接体现。

i 一侧绝热壁

如果下壁 $y = 0$ 绝热，则

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = 0.$$

若上壁维持温度 T_e ，由式 4.39 可得绝热下壁温度

$$T_{aw} = T_e + \frac{\mu U^2}{2k_T}.$$

绝热壁没有热量穿过，因此黏性耗散产生的热量必须通过另一侧壁面导出。这里仅强调其物理意义，不再展开更完整的传热分析。

4.15 无量纲速度剖面的普适性

经典精确解在适当归一化后，常能把不同物理参数下的速度剖面塌缩为同一曲线。例如

Couette 流: $u^* = y^*$, 平面 Poiseuille 流: $u^* = 1 - y^{*2}$, 圆管 Poiseuille 流: $u^* = 1 - r^{*2}$.

无量纲参数决定实际的速度与长度大小，无量纲形式则揭示解的共同结构。这正是第 3 章无量纲化思想在解析解中的直接体现。

4.16 经典解的适用条件

解析解之所以能够获得，通常依赖于很强的理想化假设。

例如圆管 Hagen-Poiseuille 解要求：圆管笔直；截面恒定；流体为 Newton 流体；不可压缩；稳态；层流；充分发展；无滑移；黏度常数。

如果实际问题不满足这些条件，公式就不能直接使用。

例如：入口发展段；管径快速变化；强非稳态；非 Newton 流体；湍流；壁面滑移；强温度依赖黏度。都会使经典解发生改变。

! 不要脱离假设使用公式

一个解析公式最重要的部分，不只是结果本身，还包括它成立的条件。

4.17 本章的统一思路

本章所有问题都可以用同一套方法处理：

完整 Navier-Stokes 方程 $\rightarrow$ 几何、稳态性、对称性与充分发展条件 $\rightarrow$ 简化微分方程
 $\rightarrow$ 边界条件 $\rightarrow$ 解析速度分布 $\rightarrow Q$ 、 U_b 、 $U_{\max}$ 、 τ_w 、 $\Delta p \rightarrow$ 无量纲形式与物理解读。

这是本章真正希望训练的能力。

4.18 本章小结

1. 经典解析解的价值首先在于展示如何简化 Navier-Stokes 方程。对定常、充分发展、单向的直通道流，完整方程可化为共同的线性“母方程”。
2. 平面 Couette 流由运动壁面驱动。速度分布为 $u(y) = Uy/h$ ，剪切应力为常数 $\tau_{xy} = \mu U/h$ 。
3. 同轴圆柱 Couette 流具有保留曲率的精确解，窄间隙旋转黏度计公式只是其工程极限。只有检查 $\delta/R_i \ll 1$ 后，才能用局部线性剖面反求黏度。

4. 平面 Poiseuille 流由压强梯度驱动。速度分布为 $u(y) = -(2\mu)^{-1}(dp/dx)(h^2 - y^2)$ ，呈抛物线分布，且 $U_{\max} = 3U_b/2$ 。
5. Couette-Poiseuille 流可以看成壁面剪切驱动与压强驱动的线性叠加。逆向压强梯度足够强时可产生局部反向流。
6. 圆管 Hagen-Poiseuille 流满足 $u(r) = -(4\mu)^{-1}(dp/dz)(R^2 - r^2)$ ，且 $U_{\max} = 2U_b$ 。
7. 圆管流量-压降关系为 $Q = (\pi R^4/8\mu)(\Delta p/L)$ ，其中 $Q \propto R^4$ 是极其重要的尺度关系。
8. 圆管层流的 Darcy 摩擦系数满足 $f_D = 64/Re_D$ 。
9. 重力驱动液膜由重力与黏性平衡控制。固壁无滑移与自由表面零剪切共同决定其速度剖面。
10. Stokes 第一问题满足动量扩散方程 $\partial u/\partial t = \nu \partial^2 u/\partial y^2$ ，黏性影响传播距离满足 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 。
11. Stokes 第二问题展示了振荡动量的黏性穿透。穿透深度为 $\delta_s = \sqrt{2\nu/\Omega}$ 。
12. 稳态 Couette 流中，壁面做功等于黏性耗散；稳态 Poiseuille 流中，压强做功等于黏性耗散。外界持续输入的机械能最终转化为内能。
13. (拓展) Couette 流中的黏性耗散可以直接引起温升。即使两壁温度相等，流体内部仍可形成抛物线温度分布，并在内部达到最高温度。
14. 无量纲速度剖面揭示了解的普适结构，而不是具体工况的数值大小。

习题

题目层级： 必做（核心概念、基本推导与标准计算）； 选做（进阶推导、专题应用与方法比较）； 研究训练（开放论证、建模判断、CFD/实验分析或综合研究）。

基础题

4.1 必做

考虑平面 Couette 流：

$u(y) = U \frac{y}{h}$. 求：

1. 速度梯度；
2. 剪切应力；
3. 单位宽度流量；
4. 平均速度；
5. 若 h 减半而 U 不变，壁面剪切应力如何变化？

4.2 必做

平面 Couette 流中，为什么速度剖面与黏度 μ 无关，但壁面剪切应力却与 μ 成正比？

4.3 必做

平面 Poiseuille 流满足

$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}(h^2 - y^2)$. 求：

1. 最大速度位置；

2. 最大速度;
3. 中心线剪切应力;
4. 两侧壁面剪切应力。

4.4 必做

证明平面 Poiseuille 流中

$$U_{\max} = \frac{3}{2}U_b. \quad 4.5 \quad \text{必做}$$

证明圆管 Hagen–Poiseuille 流中

$$U_{\max} = 2U_b.$$

方程简化题

4.6 必做

从二维不可压缩 Navier–Stokes 方程出发, 逐步证明对于稳态、充分发展、无压强梯度的平面 Couette 流,

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \text{ 要求明确说明每一个被删除的项对应哪个物理假设。}$$

4.7 必做

从二维不可压缩 Navier–Stokes 方程出发, 推导平面 Poiseuille 流的简化方程

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \text{ 为什么 } dp/dx \text{ 在充分发展条件下必须为常数?}$$

4.8 必做

对于单向流动

$$\mathbf{u} = (u(y), 0, 0), \text{ 为什么 Navier–Stokes 方程中的非线性对流项可以完全消失?}$$

这是否意味着完整 Navier–Stokes 方程本身是线性的?

Couette–Poiseuille 流

4.9 必做

考虑两板间距 h , 上壁速度为 U , 下壁固定, 并有压强梯度 dp/dx 。

推导

$$u(y) = U \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y). \quad 4.10 \quad \text{必做}$$

对于习题 4.9 的 Couette–Poiseuille 流, 求净流量为零时的压强梯度。

4.11 必做

讨论当

$\frac{dp}{dx} > 0$ 且足够大时, 为什么可能在靠近下壁区域出现反向流动。

圆管流

4.12 必做

从圆管 Hagen-Poiseuille 速度分布出发推导

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad 4.13 \quad \text{必做}$$

某圆管半径增加 10%, 其他条件保持不变。

根据 Hagen-Poiseuille 定律, 流量增加多少百分比?

4.14 必做

圆管内水流满足层流 Hagen-Poiseuille 解。若管长增加为原来的 2 倍, 而压差保持不变, 流量如何变化?

若希望保持原流量不变, 压差应如何变化?

4.15 必做

从 Hagen-Poiseuille 解推导壁面剪切应力

$$|\tau_w| = \frac{D}{4} \frac{\Delta p}{L}. \text{ 再利用 Darcy-Weisbach 关系推导}$$

$$f_D = \frac{64}{Re_D}.$$

重力液膜

4.16 选做

推导倾斜平板重力液膜速度分布:

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \chi}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right). \text{ 要求说明:}$$

1. 为什么壁面使用无滑移条件;
2. 为什么自由表面使用零剪切条件。

4.17 选做

证明重力液膜单位宽度流量为

$$q = \frac{\rho g h^3 \sin \chi}{3\mu}. \text{ 若液膜厚度增加为原来的 2 倍, 流量如何变化?}$$

4.18 选做

比较重力液膜与平面 Poiseuille 流的速度剖面。

为什么二者控制方程形式相似, 但最大速度的位置不同?

非定常黏性流动

4.19 选做

从 Navier-Stokes 方程出发, 推导 Stokes 第一问题的控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \text{ 要求说明为什么对流项为零。}$$

4.20 选做

使用量纲方法说明, Stokes 第一问题中唯一可能由 y, t, ν 构成的基本无量纲组合可以写成

$$\frac{y}{\sqrt{\nu t}}. \quad 4.21 \quad \text{选做}$$

若两种流体的运动黏度分别为

ν_1 和

$\nu_2 = 4\nu_1$, 经过相同时间 t 后, 二者黏性影响厚度

$\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 之比是多少?

4.22 选做

Stokes 第一问题中壁面剪切应力大小满足

$|\tau_w| = \frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}}$. 1. 为什么 $t \rightarrow 0^+$ 时该表达式趋于无穷大? 2. 这种数学奇异性来自模型中的哪个理想化假设? 3. 实际机械系统中为什么不会真正产生无穷大的剪切应力?

无量纲训练题

4.23 选做

将平面 Couette 流写成

$u^* = f(y^*)$, 其中

$u^* = \frac{u}{U}$, $y^* = \frac{y}{h}$. 说明为什么不同黏度下速度曲线能够完全重合。

4.24 选做

对于平面 Poiseuille 流, 分别使用:

1. $U_{\max}$;
2. U_b ;

作为速度尺度进行无量纲化。

写出对应的无量纲速度剖面。

4.25 选做

对于圆管 Poiseuille 流, 证明

$$\frac{u}{U_b} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad \text{4.26} \quad \text{选做}$$

某研究者比较不同半径圆管中的层流速度剖面，并直接绘制 $u(r)$ 。

你建议如何重新定义横纵坐标，使所有理论速度剖面塌缩为一条曲线？

综合题

4.27 研究训练

考虑两平行静止板之间的压强驱动层流。

已知：

$$2h = 4 \text{ mm}, \mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, -\frac{dp}{dx} = 200 \text{ Pa/m. 求:}$$

1. 最大速度；
2. 平均速度；
3. 单位宽度流量；
4. 壁面剪切应力大小。

4.28 研究训练

某圆管：

$$D = 10 \text{ mm}, L = 1 \text{ m. 流体动力黏度为}$$

$$\mu = 2.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s. 若希望体积流量为}$$

$$Q = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}, \text{ 根据 Hagen-Poiseuille 定律求所需压差。}$$

并说明在使用该结果前还应检查什么条件。

4.29 研究训练

对于一维平行流，可以出现以下三种简化方程：

$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, $0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 分别指出这三种方程对应的典型流动，并解释每一种方程所代表的主要物理平衡。

能量与工程应用

4.30 必做

对于平面 Couette 流，利用

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

证明

$$\tau_w U = \int_0^h \Phi \, dy.$$

说明该等式左右两边分别代表什么物理量。

4.31 选做

对于平面 Poiseuille 流, 定义 $G = -dp/dx > 0$ 。证明

$$Gq = \int_{-h}^h \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy.$$

为什么这一关系可以理解为压强做功与黏性耗散之间的整体能量平衡?

4.32 选做

某窄间隙旋转黏度计的参数为

$$R_i = 20 \text{ mm}, \quad R_o = 20.5 \text{ mm}, \quad H_g = 50 \text{ mm}.$$

内圆柱以 $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ 旋转, 测得黏性力矩为 $M = 1.0 \times 10^{-3} \text{ N m}$ 。

1. 根据窄间隙 Couette 近似计算流体黏度;
2. 计算 δ/R_i , 判断窄间隙近似是否合理;
3. 若间隙进一步增大, 为什么不能继续假设速度沿半径线性变化?

4.33 选做

两壁温度相等 $T_w = T_e = T_0$ 的平面 Couette 流中, 证明

$$T - T_0 = \frac{\mu U^2}{2k_T} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

进一步求:

1. 最大温度出现的位置;
2. 最大温升 $T_{\max} - T_0$;
3. 为什么没有外加壁面温差时, 流体内部仍然可以升温?

思考与讨论

1. 为什么 Couette 流速度剖面为直线, 而 Poiseuille 流速度剖面为抛物线?
2. 为什么压强驱动流动必须存在壁面剪切应力才能达到稳态?
3. 为什么圆管流中中心线速度梯度和剪切应力都为零?
4. Hagen-Poiseuille 定律中 R^4 依赖为什么如此强?
5. 为什么自由表面的零剪切条件会使液膜最大速度出现在自由表面?

6. 为什么 Stokes 第一问题没有对流项，但仍然能体现黏性的动量输运？
7. 为什么 Stokes 第一问题中壁面影响不能瞬间传遍整个流场？
8. 经典精确解为什么在 CFD 代码验证中非常有价值？
9. 如果数值结果无法恢复 Couette 或 Poiseuille 解析解，可能有哪些原因？
10. 当一个实际问题与经典解析解的假设不完全一致时，应该如何判断该解析解还能不能作为近似参考？
11. 为什么稳态 Couette 流和 Poiseuille 流虽然驱动机制不同，却都满足“机械功输入 = 黏性耗散”？
12. 为什么两壁等温并不意味着 Couette 流内部一定等温？什么情况下黏性加热可以忽略？

Generated 2026-08-30 23:28