

第三章 量纲分析与控制方程的无量纲化

本章导言

第 2 章建立的不可压缩 Navier–Stokes 方程仍以有量纲变量表示，不便直接识别控制参数，也不利于比较不同尺度、实验或数值工况。无量纲化（nondimensionalization）通过选取特征尺度改写变量和方程，其核心作用是：

1. 减少独立参数的数量；
2. 把不同物理机制之间的相对重要性显式写进控制方程。

本章训练这一方法；尺度分析与数量级估计留到第 6 章结合边界层展开。

学习目标

完成本章学习后，应能够：

1. 区分物理量、数值、单位和量纲，并用量纲齐次性检查物理方程；
2. 为给定问题选择特征长度、速度、时间和压强尺度，正确变换变量及其导数；
3. 将控制方程、初始条件和边界条件作为一个整体无量纲化；
4. 从作用比、时间尺度比和方程系数三个角度解释 Reynolds 数，并说明为什么系数小不等于对应项处处很小；
5. 比较惯性与黏性压强尺度，并从方程项的比值解释 St 、 Eu 和 Fr 的来源；
6. 使用 Buckingham II 定理和量纲矩阵进行简单的参数归并；
7. 区分几何相似、运动相似和动力相似，并用无量纲变量组织可塌缩的实验或数值数据；
8. (拓展) 说明不可压缩非等温流动中 Pr 与 Ra 如何由新增输运机制产生。

3.1 物理量、单位与量纲

物理量与单位。一个物理量通常可以写成 $Q = \{\text{数值}\} \times [\text{单位}]$ 。这里用花体 Q 表示任意物理量，普通斜体 Q 保留给体积流量。例如 $U = 2.0 \text{ m/s}$ 中， U 是物理量，2.0 是数值，m/s 是单位；若改写为 $U = 200 \text{ cm/s}$ ，物理量本身并没有改变，只是数值和单位随单位制改变。

物理规律不应该依赖人为选择的单位制。

这正是量纲分析能够成立的基础。

基本量纲。在经典流体力学中最常用的基本量纲为 $[M]$ 、 $[L]$ 、 $[T]$ ，分别表示质量、长度和时间；若涉及传热，还需引入温度量纲 $[\Theta]$ 。本章主要讨论等温黏性流动，因此通常只需使用 M, L, T 三个基本量纲。

常见物理量的量纲。

速度。 $[U] = LT^{-1}$ 。

加速度。 $[a] = LT^{-2}$ 。

密度。 $[\rho] = ML^{-3}$ 。

压强和应力。由于 $p \sim \frac{\text{力}}{\text{面积}}$ ，所以 $[p] = ML^{-1}T^{-2}$ 。

剪切应力具有相同量纲： $[\tau] = ML^{-1}T^{-2}$ 。

动力黏度。由 Newton 黏性定律 $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ ，可得 $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ 。

运动黏度。由 $\nu = \mu/\rho$ ，可得 $[\nu] = L^2T^{-1}$ 。

这一量纲与扩散系数相同。若进一步考虑温度输运，热扩散率 α 也具有 L^2T^{-1} 的量纲。后文将看到， ν 与 α 的比值构成 Prandtl 数。

物理量	SI 单位	量纲
密度 ρ	kg/m ³	ML^{-3}
压强、应力 p, τ	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
动力黏度 μ	Pa · s	$ML^{-1}T^{-1}$
运动黏度 ν	m ² /s	L^2T^{-1}
热扩散率 α	m ² /s	L^2T^{-1}

3.2 量纲齐次性

一个正确的物理方程，其等号两边必须具有相同量纲；如果包含多个相加减的项，则每一项也必须具有相同量纲。

例如 Navier–Stokes 方程：

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u = -\nabla p + \mu \nabla^2 u.$$

检查各项量纲。

非定常惯性项：

$$\left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] = ML^{-3} \times LT^{-2} = ML^{-2}T^{-2}.$$

对流惯性项：

$$[\rho u \cdot \nabla u] = ML^{-3} \times LT^{-1} \times T^{-1} = ML^{-2}T^{-2}.$$

压强梯度项： $[\nabla p] = L^{-1} \times ML^{-1}T^{-2} = ML^{-2}T^{-2}$ 。

黏性项：

$$[\mu \nabla^2 u] = ML^{-1}T^{-1} \times L^{-2} \times LT^{-1} = ML^{-2}T^{-2}.$$

所有项量纲一致。

量纲齐次也为推导和计算提供了直接的自检手段。量纲检查不能证明一个公式一定正确，但它可以快速发现漏掉长度尺度、指数写错、黏度 μ 与 ν 混用、压强与压强梯度混淆、代码中变量单位不一致或经验关联式抄写错误等问题。

例 3.1 检查扩散长度尺度。有人提出，黏性影响传播的典型距离满足 $\delta \sim \nu t$ 。

检查量纲： $[\nu t] = L^2T^{-1} \times T = L^2$ 。

而 δ 应具有长度量纲 L ，因此该关系不可能正确。

如果改为 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ ，则 $[\sqrt{\nu t}] = L$ ，

量纲正确。

这并不能单独证明 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 一定成立，但至少说明它在量纲上是可能的。

！先检查量纲，再相信公式

在科研中，一个新得到的公式、拟合关系或数值结果，第一项检查往往应该是：
量纲是否正确？

3.3 无量纲变量与特征尺度

特征尺度与无量纲变量。对一个具体流动问题，通常可以识别出特征长度 L 、特征速度 U 、特征时间 T_c 、特征压强 P_c 和特征体力加速度 b_c 等代表性尺度，并定义 $x^* = x/L$ 、 $u^* = u/U$ 、 $t^* = t/T_c$ 和 $p^* = (p - p_{\text{ref}})/P_c$ 。上标 * 表示无量纲变量。合理尺度通常使主要区域中的主要变量为 $O(1)$ ，这是一项尺度选择原则，而不是要求每个变量在每一点都具有统一数量级。边界层或其他局部内层中，导数可能随小尺度而增大；尖角、起动瞬间和其他奇异点附近也可能出现异常梯度；远场或匹配外区中的某些扰动量则可能远小于 $O(1)$ 。

特征尺度不是唯一的。同一个流动问题有时可以采用不同的特征尺度。例如圆管流动的长度尺度既可取管径 D ，也可取管半径 R ；这里普通斜体 D 表示直径，与第 2 章的变形率张量 D 区分。对应的 Reynolds 数分别为 $Re_D = UD/\nu$ 和 $Re_R = UR/\nu$ ，二者相差常数因子 $Re_D = 2Re_R$ 。因此，在引用临界 Reynolds 数或经验关联式时，必须明确：

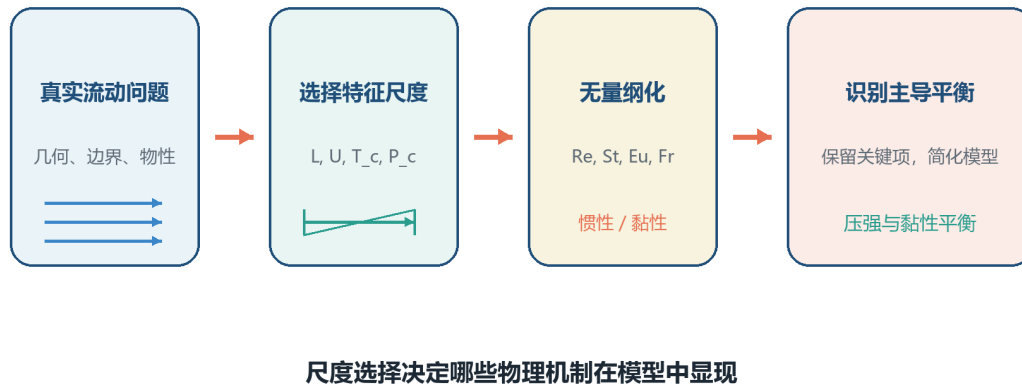


图 3.1: 从真实流动问题到主导平衡的分析链：特征尺度的选择决定哪些物理机制以何种无量纲参数显现在模型中。

Reynolds 数中的特征长度是如何定义的。

特征尺度应来自问题本身。典型选择包括：

外流。物体尺寸： $L = D$, c , 或其他几何长度。

速度尺度通常取来流速度： $U = U_\infty$ 。

管内流动。长度尺度通常取： $L = D_h$,

其中 D_h 为水力直径。

速度尺度通常取截面平均速度： $U = U_b$ 。

移动壁面问题。例如 Couette 流，可以取壁面速度作为速度尺度： $U = U_w$ 。

压强驱动问题。有时速度本身不是已知输入，而是由压强梯度决定。这时可以根据问题定义一个自然速度尺度。

一些常见问题的尺度选择可概括如下：

流动问题	常用特征长度	常用特征速度
圆柱绕流	圆柱直径 D	来流速度 U_∞
管内流动	水力直径 D_h	截面平均速度 U_b
Couette 流	壁面间距 h	壁面速度 U_w
外部边界层	流向长度 L	来流速度 U_∞

这里的选择不是查表得到的唯一答案，而是由研究对象和所关注的物理过程决定的。时间尺度和压强尺度同样可能有不同的合理选择。

这一点将在后续 Poiseuille 流以及本章 3.6 节中进一步看到。

3.4 控制方程的基本无量纲化

3.4.1 导数的尺度变换

无量纲化控制方程时，关键不是只替换变量本身，还要正确处理导数。

若 $x = Lx^*$ ，则 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}$ 。

因此 $\nabla = \frac{1}{L} \nabla^*$ ，

以及 $\nabla^2 = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2}$ 。

类似地，若 $t = T_c t^*$ ，则 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T_c} \frac{\partial}{\partial t^*}$ 。

若 $u = Uu^*$ ，时间导数相应变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U}{T_c} \frac{\partial u^*}{\partial t^*},$$

而

$$u \cdot \nabla u = \frac{U^2}{L} u^* \cdot \nabla^* u^*.$$

黏性项则为 $\nabla^2 u = \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} u^*$ 。

这些变换是控制方程无量纲化的基础。

3.4.2 连续性方程

对于不可压缩流动， $\nabla \cdot u = 0$ 。

代入 $x = Lx^*$ ， $u = Uu^*$ ，

得到 $\frac{U}{L} \nabla^* \cdot u^* = 0$ 。

两边除以 U/L ：

$$\nabla^* \cdot u^* = 0 \quad (3.1)$$

可以看到，不可压缩连续性方程在无量纲化后形式保持不变。

3.4.3 Navier–Stokes 方程

先考虑无体力情况下的不可压缩 Navier–Stokes 方程：

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u.$$

选择： $x = Lx^*$, $u = Uu^*$, $t = \frac{L}{U}t^*$ 。

这里 L/U 称为**对流时间尺度**，表示流体以速度 U 穿越长度 L 所需的典型时间。

选定对流时间尺度后，还需要选择压强尺度。对于许多惯性显著的流动，一个自然的选择是 $P_c = \rho U^2$ 。

于是定义 $p = p_{\text{ref}} + \rho U^2 p^*$ 。

代入各项。

非定常项：

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*}.$$

对流项：

$$\rho u \cdot \nabla u = \rho \frac{U^2}{L} u^* \cdot \nabla^* u^*.$$

压强梯度项： $\nabla p = \rho \frac{U^2}{L} \nabla^* p^*$ 。

黏性项： $\mu \nabla^2 u = \mu \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} u^*$ 。

全部除以 $\rho U^2/L$ ，便得到

$$\boxed{\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*} \quad (3.2)$$

控制黏性项相对强弱的 Reynolds 数为

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}} \quad (3.3)$$

这就是 Reynolds 数从控制方程中出现的过程。

3.5 Reynolds 数的三种理解

第 1 章已经初步介绍 Reynolds 数。本节从无量纲方程出发进一步理解它。

作用力尺度。从有量纲方程可见，典型惯性项尺度为 $\rho U^2/L$ ，典型黏性项尺度为 $\mu U/L^2$ ，二者之比为 $Re = \rho UL/\mu$ 。因此，Reynolds 数首先可以理解为惯性效应与黏性效应之比。

时间尺度。对流时间尺度为 $t_c = L/U$ ，黏性动量扩散时间尺度为 $t_\nu = L^2/\nu$ ，二者同样满足 $t_\nu/t_c = UL/\nu = Re$ ，所以

$$Re = \frac{\text{黏性扩散时间尺度}}{\text{对流时间尺度}}$$

这提供了非常直观的解释： $Re \ll 1$ ：黏性扩散很快，能够迅速影响整个流动尺度； $Re \gg 1$ ：对流远快于黏性跨越整个尺度的扩散。

方程系数。在式 3.2 中，黏性项前的系数为 $1/Re$ ；当 Re 很大时，该系数很小，但必须特别谨慎：

系数小并不意味着黏性项在所有位置都可以直接删除。

原因在于， $\nabla^2 u^*$ 本身可能在某些区域非常大。

高 Reynolds 数壁面流动正是最典型的情况。第 6 章将看到，壁面附近的速度梯度可以非常大，使黏性项即使乘以 $1/Re$ ，仍然保持重要。

这是边界层理论的出发点。

Reynolds 数的三种等价理解



图 3.2: Reynolds 数的三种等价理解：惯性与黏性作用之比、黏性扩散时间与对流时间之比，以及无量纲 Navier–Stokes 方程中黏性项的控制参数。

3.6 其他尺度选择与项的比值

Re 来自惯性项与黏性项的比值；采用同样方法，独立时间尺度、一般压强尺度和重力尺度会分别引出 St 、 Eu 和 Fr 。这些参数不是彼此孤立的定义，而是把某一方程项与选定参考项比较后得到的系数。

3.6.1 独立时间尺度与 Strouhal 数

如果流动存在独立的外加时间尺度 T_c ，例如周期振荡、脉动入口、周期性来流、外部强迫或涡脱落，就不一定应取 $T_c = L/U$ 。

此时定义 $t = T_c t^*$ 。

Navier-Stokes 方程中的非定常项尺度为 $\rho \frac{U}{T_c}$ ，

对流项尺度为 $\rho \frac{U^2}{L}$ 。

二者之比为 $\frac{L}{UT_c}$ 。

若定义特征频率 $f \sim 1/T_c$ ，则得到

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT_c} \quad (3.4)$$

这就是 **Strouhal 数**。

仍采用压强尺度 $P_c = \rho U^2$ 时，Strouhal 数会显式出现在无量纲 Navier-Stokes 方程中：

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* \quad (3.5)$$

这里： St 控制非定常项相对于对流项的重要程度； Re 控制黏性项相对于惯性项的重要程度。

如果选择 $T_c = L/U$ ，则自动有 $St = 1$ 。

因此，上一节的无量纲化实际上相当于把对流时间尺度作为时间尺度，从而把 Strouhal 数吸收到时间变量的定义中。

3.6.2 压强尺度、Euler 数与压强系数

压强的无量纲化值得单独讨论，因为它并不总是只有一种自然选择。

惯性压强尺度。对惯性作用显著的流动，常取 $P_c = \rho U^2$ ，使压强梯度项与惯性项具有相同的参考尺度。对应的无量纲压强为 $p^* = (p - p_{\text{ref}})/(\rho U^2)$ ；外流中常用的压强系数 $C_p = (p - p_\infty)/(\frac{1}{2}\rho U_\infty^2)$ ，本质上就是这种无量纲化的一个变体。

黏性压强尺度。对黏性占主导的流动，也可选择 $P_\mu = \mu U/L$ ，此时压强梯度尺度 $P_\mu/L = \mu U/L^2$ 正好与黏性项同阶。

采用 $p = p_{\text{ref}} + \frac{\mu U}{L} p^*$ ，

并用黏性尺度 $\mu U/L^2$ 归一化动量方程，可得到

$$Re \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} u^* \quad (3.6)$$

这里 Reynolds 数出现在惯性项前，而不是黏性项前。

这与式 3.2 完全等价，只是归一化方式不同。

两种形式为何都正确。式 3.2 与式 3.6 采用不同的参考压强和整体归一化尺度，因而形式不同但完全等价。前者突出高 Reynolds 数极限，后者突出低 Reynolds 数极限，并将在第 5 章 creeping flow 中自然出现。

需要注意，两种写法中的 p^* 定义并不相同，不能把它们的数值直接逐点比较；恢复为有量纲压强后，二者才描述同一个物理量。这也是阅读不同教材或软件手册时必须先核对参考尺度的原因。

! 无量纲化不是机械换元

无量纲化过程中“用什么尺度除”本身就是物理判断。

不同尺度选择可以把不同的主导机制突出出来。

一般压强尺度所对应的项比值。

若不预先规定压强尺度，而是保留一个一般压强差尺度 Δp : $p = p_{\text{ref}} + \Delta p p^*$,

则压强梯度项与惯性项的比值为 $\frac{\Delta p/L}{\rho U^2/L} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$ 。

这一比值定义为 Euler 数

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \quad (3.7)$$

称为 Euler 数。

无量纲动量方程中压强项可写成 $-Eu \nabla^* p^*$ 。

在很多空气动力学和水动力学问题中，更常使用压强系数: $C_p = \frac{p - p_{\text{ref}}}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ 。

Euler 数和压强系数都反映压强作用相对于惯性作用的大小。

⚠ 注意分母中的 1/2

本书采用 $Eu = \Delta p / (\rho U^2)$ ，而压强系数采用动压 $\frac{1}{2} \rho U^2$ 归一化。若把同一个压强差同时作为两者的分子，则按本书定义有 $C_p = 2Eu$ 。部分文献也把 Euler 数定义为 $\Delta p / (\frac{1}{2} \rho U^2)$ ，此时它与相应压强系数的数值一致。这个常数因子不代表物理差异；查阅或比较文献数据时，应先核对定义中是否包含 1/2。

3.6.3 重力尺度与 Froude 数

如果保留重力项， ρg ,

Navier-Stokes 方程为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho g.$$

采用惯性尺度归一化后，重力项系数为 $\frac{gL}{U^2}$ 。

据此定义 Froude 数

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (3.8)$$

则 $\frac{gL}{U^2} = \frac{1}{Fr^2}$ 。

因此无量纲方程可写为

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g.$$

Froude 数衡量惯性作用与重力作用之间的相对关系。

它在以下问题中尤其重要：自由表面流动；船舶水动力学；明渠流动；重力波。

对于本书主体的很多封闭不可压缩流动，如果密度常数且重力可以吸收到修正压强中，则不一定需要显式保留 Fr 。

3.6.4 统一的无量纲 Navier–Stokes 形式

对于具有独立时间尺度 T_c 、压强尺度 Δp 和重力作用的流动，可以写成

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -Eu \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g \quad (3.9)$$

其中 $Re = \frac{UL}{\nu}$ ， $St = \frac{L}{UT_c}$ ， $Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$ ， $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ 。

这些参数可以理解为控制方程中不同物理机制竞争关系的量度：

无量纲参数	所比较的主要物理机制
Re	惯性作用与黏性作用
St	非定常变化与对流输运
Eu	压强作用与惯性作用
Fr	惯性作用与重力作用

这个统一形式揭示出一个重要认识：

无量纲数不是需要彼此孤立记忆的一组定义，而是控制方程中不同物理机制相互竞争的定量表达。

因此，对一个陌生流动问题，首先应判断哪些物理机制可能重要，再选择相应尺度并识别控制参数，而不是先机械地罗列所有熟悉的无量纲数。

3.7 Buckingham II 定理

控制方程无量纲化是本书最重要的方法，但在某些情况下，我们未必掌握完整控制方程，此时量纲分析仍可以帮助减少变量数量。

基本思想。假设某个物理问题由 n 个有量纲变量 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 决定，并涉及 r 个独立基本量纲，则 Buckingham II 定理表明：

该问题可以改写为 $n - r$ 个独立无量纲组合之间的关系。

即 $F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$ 。

圆柱或球体阻力的例子。假设物体在均匀来流中的阻力 F_D 由 ρ, U, L, μ 决定，把响应量也计入后共有 F_D, ρ, U, L, μ 五个变量。它们只涉及 M, L, T 三个基本量纲，因而应有 $5 - 3 = 2$ 个独立无量纲组合。

为了把计算过程写清楚，设

$$\Pi = F_D^a \rho^b U^c L^d \mu^e.$$

将每个变量在 M, L, T 上的指数按列排列，无量纲条件等价于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

这个 3×5 量纲矩阵的秩为 3，因此零空间维数为 2。可选取两组独立指数向量 $(1, -1, -2, -2, 0)$ 和 $(0, 1, 1, 1, -1)$ ，分别得到

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho U^2 L^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho U L}{\mu} = Re.$$

不同的零空间基底可能给出外观不同的 Π 组，但它们可以相互组合，包含的物理信息相同。以上选择使原关系直接写成 $F_D/(\rho U^2 L^2) = \mathcal{F}(Re)$ 。

若进一步定义阻力系数 $C_D = F_D/(\rho U^2 A/2)$ ，则

$$C_D = f(Re) \quad (3.11)$$

在给定几何形状和来流条件下，原先由 ρ, U, L, μ 构成的大量组合由此归并为 Reynolds 数这一控制参数，实验和计算可以直接围绕 Re 组织。

Buckingham II 定理的局限。量纲分析非常有用，但它不能告诉我们函数 f 的具体形式。



矩阵把“凑指数”转化为线性代数问题；不同基底给出等价的无量纲组

图 3.3: Buckingham II 定理的计算流程：先列出问题变量，再把各变量的基本量纲指数写成量纲矩阵；求矩阵零空间后得到两个独立无量纲组。

例如， $C_D = f(Re)$ 并不能仅凭量纲分析进一步确定为 $C_D = 24/Re$ ；后一个结果来自低 Reynolds 数球体绕流控制方程的求解。量纲分析能够识别应出现的无量纲变量，却通常不能给出它们之间的具体函数关系。

控制方程无量纲化与 Buckingham II 定理的区别。

这两种方法都会产生无量纲参数，但解决的问题不同。控制方程无量纲化保留了各项对应的物理机制及其相对系数，适合研究极限、主导平衡和数值模型；Buckingham II 定理不要求预先掌握完整控制方程，适合减少实验参数并整理经验关系。因此，本书以控制方程无量纲化为主，以 Buckingham II 定理为补充。

3.8 几何相似、运动相似与动力相似

无量纲化的重要应用之一，是建立不同尺度流动之间的相似性。风洞、水洞和水槽试验中经常使用缩尺模型研究真实尺度的飞机、车辆、船舶或工程结构。此时，仅仅把几何尺寸按比例缩小并不能保证模型中的流动与原型相同；模型试验能够代表原型的前提，是两者在控制流动的关键无量纲参数上具有一致性。

3.8.1 几何相似

两个流动系统如果所有对应长度的比例相同，则称为**几何相似**。例如

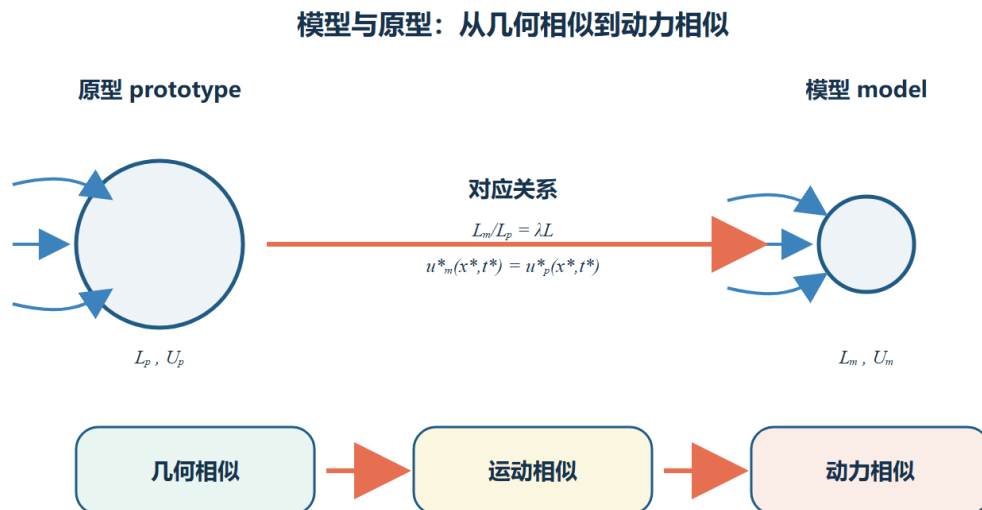


图 3.4: 模型与原型之间的相似关系：几何相似保证对应长度成比例；运动相似进一步要求对应速度场成比例；动力相似则要求无量纲控制方程、边界条件以及关键无量纲参数一致。

$$\frac{L_1^{(m)}}{L_1^{(p)}} = \frac{L_2^{(m)}}{L_2^{(p)}} = \lambda_L,$$

其中上标 m 表示模型 (model), p 表示原型 (prototype), λ_L 为长度比例。

几何相似只说明边界形状之间的对应关系, 并不保证流场本身相似。

3.8.2 运动相似

若两个几何相似流动中, 对应位置的速度方向相同, 并且所有对应速度保持统一的比例, 则称为**运动相似**。

从无量纲变量的角度看, 运动相似意味着两种流动具有相同的无量纲速度场。例如若

$$u^{*(m)}(x^*, t^*) = u^{*(p)}(x^*, t^*),$$

则两个系统虽然实际速度和尺寸不同, 但其无量纲运动学结构相同。

3.8.3 动力相似

若模型和原型的无量纲控制方程与无量纲边界条件相同, 并且控制问题的关键无量纲参数相同, 则称两者具有**动力相似**。

对于主要由惯性和黏性控制的流动, 最基本的条件通常是

$$Re_m = Re_p.$$

若重力对自由表面运动同样重要，还可能同时要求

$$Fr_m = Fr_p.$$

若问题具有独立的周期或强迫时间尺度，还可能需要保证相应的 St 一致。

! 动力相似不是简单的 Reynolds 相似

需要匹配哪些无量纲参数，取决于问题中哪些物理机制真正参与主导平衡。

问题中的主要机制	需要重点匹配的参数
惯性-黏性	Re
惯性-黏性-重力	Re, Fr
惯性-黏性-独立非定常过程	Re, St

因此，动力相似的本质不是“所有问题都匹配 Reynolds 数”，而是使控制当前问题的无量纲模型保持一致。

在实际缩尺实验中，不同无量纲参数有时无法同时匹配。此时必须根据研究目标判断哪个机制最重要，并明确模型试验在哪些方面能够代表原型、在哪些方面存在尺度效应。

3.8.4 Reynolds 相似的缩尺算例

考虑模型和原型使用不同尺度： $Re_m = \frac{U_m L_m}{\nu_m}$ ， $Re_p = \frac{U_p L_p}{\nu_p}$ 。

若要求 Reynolds 相似， $Re_m = Re_p$ ，则 $\frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p}$ 。

如果使用同一种流体， $\nu_m = \nu_p$ ，则 $U_m L_m = U_p L_p$ 。

因此，如果模型尺寸缩小 10 倍，则为了保持相同 Reynolds 数，速度必须增大 10 倍。

缩尺实验因而不能只改变几何尺寸而保持其他条件不变；为了维持相同 Reynolds 数，速度、流体物性或二者往往也必须调整。

例 3.2 缩尺模型的 Reynolds 相似。某原型的特征长度为 $L_p = 2$ m，特征速度为 $U_p = 5$ m/s。采用相同流体建立 1 : 10 缩尺模型，故 $L_m = 0.2$ m。Reynolds 相似要求 $U_m L_m = U_p L_p$ ，于是

$$U_m = \frac{U_p L_p}{L_m} = \frac{(5)(2)}{0.2} = 50 \text{ m/s}.$$

小尺度模型为了达到原型的 Reynolds 数，往往需要很高的试验速度。

这一限制在大型飞机、船舶、车辆和建筑物的缩尺试验中十分常见：实验模型可以做到几何相似，但实际尺度 Reynolds 数可能难以完全复现。因此，解释模型试验结果时必须同时说明采用了什么相似准则，以及仍然存在哪些不可避免的尺度效应。

3.9 无量纲化与实验数据归一化

实验数据如果直接用有量纲形式表示，往往缺乏普适性。

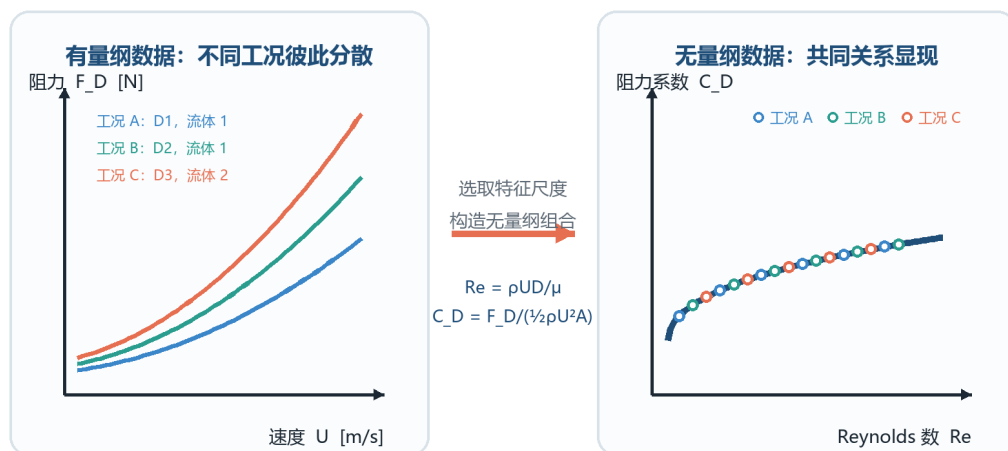
例如测得不同直径圆柱的阻力 F_D ，若直接画 F_D vs. U ，

不同直径、不同流体的数据通常不会落在同一条曲线上。

但如果改为 C_D vs. Re ，

很多数据可以发生明显塌缩。

这就是无量纲数据归一化的重要意义。



无量纲化消除尺度差异，使可推广的物理关系显现

图 3.5: 有量纲数据到无量纲塌缩的概念示意：不同尺寸和流体力工况下， F_D-U 曲线彼此分散；改用 C_D-Re 后，各组结果落到同一共同趋势附近。图中曲线和标记仅用于说明归一化思想，不代表真实实验数据。

类似的例子还包括：管流摩擦系数 f 与 Re ；压强系数 C_p ；升力系数 C_L ；Strouhal 数 St ；壁面单位 u^+ 与 y^+ 。

后续章节将不断遇到这种处理方式。

3.10 拓展：不可压缩非等温流动的无量纲化

本章主体讨论等温不可压缩黏性流动。若温度场也参与输运，仍可使用相同的无量纲化思想，只是控制方程中会出现新的特征尺度和无量纲参数。本节只把温度输运和 Boussinesq 浮力作为不可压缩非等温流动的方法扩展，用于说明 Pr 与 Ra 的来源；本书后续不系统展开传热学或自然对流理论。

3.10.1 温度输运与 Prandtl 数

对于常物性不可压缩流体，若温度满足对流-扩散方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T,$$

其中 α 为热扩散率。由于

$$[\nu] = [\alpha] = L^2 T^{-1},$$

二者之比自然构成无量纲参数

$$\boxed{Pr = \frac{\nu}{\alpha}} \quad (3.12)$$

即 **Prandtl 数**。

它表示动量扩散与热扩散的相对快慢：

$$Pr = \frac{\text{动量扩散率}}{\text{热扩散率}}.$$

因此， $Pr \ll 1$ 表示热量扩散相对更快； $Pr \gg 1$ 表示动量扩散相对更快。这里的重点不是记忆某种流体的 Pr 数值，而是理解它为什么会由两个扩散系数之比自然出现。

3.10.2 Boussinesq 近似与 Rayleigh 数

进一步考虑温差引起的浮力，但仍采用不可压缩 Boussinesq 近似：

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 u + g\beta(T - T_0)e_g,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T.$$

这里出现了一个新的问题：速度尺度并不一定是外部预先给定的。若选择热扩散尺度

$$L, \quad U_\alpha = \frac{\alpha}{L}, \quad t_\alpha = \frac{L^2}{\alpha}, \quad \Delta T,$$

并以 $\rho_0 U_\alpha^2$ 作为压强尺度，则无量纲方程中的黏性项系数变为 Pr ，浮力项系数为

$$\frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha^2}.$$

再利用 Rayleigh 数的定义

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha},$$

可将其写成

$$Ra Pr.$$

于是动量方程具有形式

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + Pr \nabla^{*2} u^* + Ra Pr T^* e_g,$$

而温度方程为

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* T^* = \nabla^{*2} T^*.$$

这里的目的不是展开自然对流理论，而是说明一个重要方法论事实：

当研究对象中加入新的输运机制和新的自然尺度时，无量纲化会自动告诉我们需要哪些新的控制参数。

同一个 Boussinesq 问题还可以采用其他速度和时间尺度；最终方程形式可能不同，但只要尺度定义自洽，所描述的物理问题仍然相同。这为理解“无量纲化没有唯一形式”提供了一个很好的综合例子。

3.11 标准流程、完整例题与常见错误

无量纲化对数值计算有三项直接作用：首先，它把 $\rho, \mu, U, L, \Delta p, \dots$ 归并为 Re 等少数控制参数，减少参数维数；其次，合理的尺度选择通常可使主要区域中的主要变量接近 $O(1)$ ，减小不必要的尺度悬殊，改善条件数，并便于复用代码和检查结果，但这不排除局部层、奇异点和外区出现不同数量级；最后，参数扫描可以直接围绕无量纲控制量组织，例如圆柱绕流可按 Reynolds 数扫描，而不必把速度、直径、黏度和密度视为彼此独立的变量。

3.11.1 标准步骤与自检

对于一个新的流体力学问题，可以采用如下流程。

1. 写出有量纲控制方程与边界条件。先明确求解变量、物性参数、几何尺度和外部作用。
2. 选择特征尺度。根据问题定义 L, U, T_c, P_c ，必要时还包括温度差等其他尺度。
3. 定义无量纲变量并变换导数。例如 $u = Uu^*$ 、 $x = Lx^*$ ，同时必须使用 $\partial/\partial x = L^{-1}\partial/\partial x^*$ 。
4. 代入并选取参考项归一化。保留所有尺度因子，然后识别 Re, St, Eu, Fr 等无量纲参数。
5. 同步改写边界条件。控制方程无量纲化完成并不意味着问题已经完整；初始条件和边界条件也必须使用同一套尺度。
6. 检查数量级与物理含义。主要无量纲变量通常应具有合理数量级，并能说明每个无量纲参数比较了哪些物理机制。

💡 无量纲化完成后的 checklist

完成推导后，建议逐项检查：

- L, U, T_c, P_c 的定义是否明确，并与研究对象一致？
- 所有空间导数、时间导数和高阶导数是否都带上了正确的尺度因子？
- 每一项是否真正无量纲？
- 初始条件和边界条件是否同步改写？
- 是否在同一方程中误用了不同基准尺度？
- 主要无量纲变量是否大致为合理数量级？
- 每个无量纲参数的物理含义是否能够从方程项的比值解释？
- 在取 $Re \rightarrow 0$ 、 $Re \rightarrow \infty$ 等极限时，是否同时检查了局部梯度是否可能变大？

3.11.2 完整例题：方腔顶盖驱动流

例 3.3 从控制方程到初边值条件的完整无量纲化。考虑边长为 L 的二维方腔 $0 < x < L$ 、 $0 < y < L$ 。流体为常密度、常黏度不可压缩 Newton 流体，初始时刻静止；从 $t = 0$ 起，上壁以速度 Ue_x 匀速运动，其余三壁静止，忽略体力。求解变量为 $u = (u, v)$ 和 p ，有量纲问题为

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u.$$

取

$$x = Lx^*, \quad y = Ly^*, \quad u = Uu^*, \quad t = \frac{L}{U}t^*, \quad p = p_{\text{ref}} + \rho U^2 p^*.$$

代入方程并用 U/L 与 U^2/L 归一化后，计算域变为单位正方形 $0 < x^* < 1$ 、 $0 < y^* < 1$ ，控制方程为

$$\nabla^* \cdot u^* = 0,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*) u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*, \quad Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (3.13)$$

初始条件同步变为

$$u^*(x^*, y^*, 0) = 0,$$

而 $t^* > 0$ 时的无滑移边界条件为

$$\begin{aligned} u^*(x^*, 1, t^*) &= e_x, \\ u^*(x^*, 0, t^*) &= 0, \\ u^*(0, y^*, t^*) &= 0, \\ u^*(1, y^*, t^*) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

封闭问题还需给出压强基准, 例如令单位方腔内 p^* 的面积平均为零; 固壁上的压强法向信息由动量方程和速度条件共同决定, 不能再任意指定一套独立压强值。无量纲化后, 几何尺寸、壁面速度和物性参数被归并为单位计算域、单位顶盖速度和单一控制参数 Re , 这正是标准问题能够跨流体和跨尺度比较的原因。

这个理想化问题也说明了“主要变量为 $O(1)$ ”并非逐点要求: 顶盖速度确为 $O(1)$, 但顶盖与侧壁交界处的速度条件不连续, 起动瞬间也存在局部快速变化, 因此角点和初始薄层中的梯度可以远大于整体尺度估计。实际数值计算常对顶盖起动或角点速度作平滑处理, 并应明确说明所用处理方式。

i 科研写作中的一个基本要求

论文中仅写出“ $Re = 1000$ ”通常还不够。还应明确说明构成 Reynolds 数的特征速度 U 和特征长度 L 分别如何定义。对于 St 、 Fr 等无量纲参数也应遵循同样原则。

3.11.3 常见错误

错误 1: 只给变量加星号, 但没有真正换元。不能在定义 $u^* = u/U$ 后直接把原方程中的 u 写成 u^* ; 正确做法是代入 $u = Uu^*$, 并同时变换所有空间和时间导数。

错误 2: 忽略导数中的尺度因子。例如 $\partial u / \partial x$ 不是简单变成 $\partial u^* / \partial x^*$, 而是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}.$$

错误 3: 特征长度定义不清。例如同一个圆管问题中, 有时使用半径 R , 有时使用直径 D , 却仍然直接比较 Reynolds 数, 这会导致常数因子错误。

错误 4: 把 Reynolds 数当成流体物性。Reynolds 数不是流体本身的性质, 而取决于 U 、 L 和 ν ; 同一种流体可以具有极小或极大的 Reynolds 数。

错误 5：认为无量纲化只有唯一答案。只要定义自治，不同特征尺度都可能产生正确的无量纲方程。真正重要的是尺度选择是否有物理意义、变量是否为合理数量级，以及最终形式是否有助于分析问题。

错误 6：看到 $1/Re \ll 1$ 就立即删除黏性项。这是高 Reynolds 数分析中最危险的误区之一；必须同时考虑 $\nabla^2 u^*$ 是否可能很大，边界层理论正是对此问题的系统回答。

3.12 无量纲化与全书主线

后续章节将分别用无量纲速度剖面描述精确解（第 4 章），以 $Re \ll 1$ 得到 Stokes 方程（第 5 章），以局部尺度解释高 Reynolds 数边界层（第 6 章），用 $C_D(Re)$ 、 $St(Re)$ 组织分离流与绕流数据（第 7 章），并用 u^+ 、 y^+ 等无量纲变量描述壁湍流（第 8 章）。本章 3.10 节出现的 Pr 与 Ra 只说明同一方法可以扩展到不可压缩非等温流动，不预告后续将系统讲授自然对流。

本章知识链。本章的逻辑可以概括为：

有量纲控制方程 $\rightarrow$ 选择特征尺度 $\rightarrow$ 定义无量纲变量 $\rightarrow$ 无量纲控制方程 $\rightarrow Re, St, Eu, Fr \rightarrow$ 物理机制

其中最核心的一步不是“把单位消掉”，而是：

把复杂的有量纲问题重新组织成由少数无量纲参数控制的问题。

3.13 本章小结

1. 单位可以改变，量纲不变；物理方程必须量纲齐次，量纲检查是发现公式和程序错误的重要手段。
2. 无量纲化的关键不是“消除单位”，而是根据问题选择 L, U, T_c, P_c 等特征尺度，并使复杂的有量纲问题转化为由少数控制参数支配的问题。
3. 不可压缩连续性方程在无量纲化后形式不变；采用对流时间 L/U 和惯性压强 ρU^2 时，Navier-Stokes 方程中的黏性项系数为 $1/Re$ 。
4. Reynolds 数既表示惯性与黏性作用之比，也等于黏性扩散时间与对流时间之比；但 $1/Re \ll 1$ 并不意味着黏性在所有区域都可忽略。
5. 独立时间尺度引出 St ；一般压强尺度引出 Eu ；重力作用引出 Fr 。这些无量纲数本质上都对控制方程中不同物理机制的竞争。
6. 不同特征尺度可以得到形式不同但物理等价的无量纲方程。尺度选择本身就是建模判断的一部分。
7. Buckingham
 Pi 定理能够减少变量数量，但通常不能单独给出无量纲量之间的具体函数关系。
8. 几何相似、运动相似和动力相似具有逐级增强的要求；动力相似的本质是无量纲控制方程、边界条件和关键无量纲参数一致，而不是机械地只匹配 Reynolds 数。

9. 无量纲化能够使不同尺度、不同流体和不同工况的数据发生塌缩，从而揭示更具可推广性的物理规律。
10. 当温度输运和浮力加入不可压缩流动后，同样的无量纲化方法会自然引出 Pr 和 Ra ，说明新的物理机制会对应新的控制参数。

习题

题目层级： 必做（核心概念、基本推导与标准计算）； 选做（进阶推导、专题应用与方法比较）； 研究训练（开放论证、建模判断、CFD/实验分析或综合研究）。

基础题

3.1 必做 写出下列物理量的量纲：

1. 速度 U ;
2. 加速度 a ;
3. 密度 ρ ;
4. 压强 p ;
5. 动力黏度 μ ;
6. 运动黏度 ν ;
7. 表面张力 σ (SI 单位为 N/m)。

3.2 必做 检查下列关系是否量纲齐次：

1. $t = L/U$;
2. $\delta = \nu t$;
3. $\delta = \sqrt{\nu t}$;
4. $\Delta p = \rho U^2$;
5. $F_D = \rho U^2 L$;
6. $F_D = \rho U^2 L^2$ 。

对于量纲不正确的关系，指出缺少或多出了什么量纲。

3.3 必做 已知 $x = Lx^*$, $u = Uu^*$ 。

证明：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*},$$

以及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}.$$

3.4 必做 给定二维不可压缩连续性方程 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 。

若 $x = Lx^*$, $y = Ly^*$, $u = Uu^*$, $v = Uv^*$,

证明其无量纲形式仍为 $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$ 。

控制方程无量纲化

3.5 必做从

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

出发, 使用 $x = Lx^*$, $u = Uu^*$, $t = \frac{L}{U}t^*$, $p = p_0 + \rho U^2 p^*$,

完整推导

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*.$$

要求每一步都保留尺度因子, 不允许直接写最终结果。

3.6 必做重复习题 3.5, 但采用黏性压强尺度 $p = p_0 + \frac{\mu U}{L} p^*$ 。

证明可得到

$$Re \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} u^*.$$

讨论这两种无量纲形式为什么等价。

3.7 必做若流动具有独立的时间尺度 T_c , 使用 $t = T_c t^*$

重新无量纲化 Navier-Stokes 方程, 证明非定常项前出现 $St = \frac{L}{UT_c}$ 。

若 $T_c = 1/f$, 证明 $St = \frac{fL}{U}$ 。

Reynolds 数

3.8 必做水以 $U = 0.5$ m/s

流过直径 $D = 0.02$ m

的圆管。取 $\nu = 1.0 \times 10^{-6}$ m²/s。

求 Reynolds 数。

若改用管半径作为特征长度, 新的 Reynolds 数是多少?

这两个 Reynolds 数是否表示不同的物理流动?

3.9 必做空气绕直径为 0.10 m 的圆柱流动, 来流速度为 10 m/s, 运动黏度为 $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m²/s。

计算 Reynolds 数。

若将圆柱直径缩小到 0.01 m, 希望保持 Reynolds 数不变, 需要多大的来流速度?

3.10 必做证明 $Re = \frac{L^2 \nu}{L/U}$ 。

分别解释分子和分母的物理意义。

讨论为什么这一表达式对于理解“黏性是动量扩散”特别有帮助。

Buckingham II 定理

3.11 选做假设圆球所受阻力 F_D 只依赖于 F_D , ρ , U , D , μ 。

使用 Buckingham II 定理说明, 该问题可以写成两个无量纲组合之间的关系。

要求明确写出:

1. 变量数量 n ;
2. 基本量纲数量 r ;
3. 无量纲组合数量;
4. 一个可能的无量纲阻力系数;
5. Reynolds 数。

3.12 选做假设圆柱涡脱落频率 f 取决于 f , U , D , ρ , μ 。

使用 Buckingham II 定理证明可以写成 $St = f(Re)$,

其中 $St = \frac{fD}{U}$ 。

相似性

3.13 选做某原型流动的特征长度为 $L_p = 1.5$ m,

速度为 $U_p = 4$ m/s。

使用相同流体建立 1 : 5 缩尺模型。

若要求 Reynolds 数相同, 求模型流速。

3.14 选做模型与原型使用不同流体: $\nu_m = 5\nu_p$ 。

若长度比为 $L_m/L_p = 1/10$,

要求 Reynolds 数相同, 求 U_m/U_p 。

3.15 选做一个自由表面问题同时受到惯性、黏性和重力作用。

如果要求模型和原型同时满足 $Re_m = Re_p$

和 $Fr_m = Fr_p$,

讨论为什么在使用同一种流体时，这两个条件未必能够同时通过简单调整速度满足。

不要求给出一般解，但应写出两个相似条件并进行比较。

3.16 选做对以下三类模型试验，分别判断动力相似时最需要注意哪些无量纲参数，并说明理由：

1. 无自由表面的稳态黏性绕流；
2. 同时受黏性和重力影响的自由表面流动；
3. 具有独立周期强迫的黏性流动。

研究训练题

3.17 研究训练某学生在论文中写道：

“本文所有算例的 Reynolds 数均为 1000。”

你认为这一表述是否完整？

至少列出还需要给出的两个定义，并说明为什么。

3.18 研究训练某 CFD 程序使用如下有量纲输入： $L = 10^{-3} \text{ m}$ ； $U = 10^2 \text{ m/s}$ ； $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ； $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

1. 计算 Reynolds 数；
2. 如果将长度和速度都分别除以各自特征尺度，得到 $L^* = 1$ 、 $U^* = 1$ ，说明无量纲化如何减少输入参数；
3. 讨论为什么无量纲形式更适合做参数扫描。

3.19 研究训练你得到一组实验数据： $F_D(U, D, \rho, \mu)$ 。

设计两种作图方式：

1. 有量纲方式；
2. 无量纲方式。

说明哪一种更容易揭示不同实验条件下的统一规律，并解释原因。

3.20 研究训练某同学看到 $1/Re = 10^{-5}$ 后直接把 Navier-Stokes 方程中的黏性项删除。

评价这一做法。

你的回答至少应涉及：系数大小；速度梯度；壁面；高 Reynolds 数；边界层。

3.21 研究训练考虑 Boussinesq 方程组

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 u + g\beta(T - T_0)e_g,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T.$$

采用 L 、 $U_\alpha = \alpha/L$ 、 $t_\alpha = L^2/\alpha$ 、 ΔT 和 $\rho_0 U_\alpha^2$ 分别作为长度、速度、时间、温差和压强尺度，完整完成无量纲化，并证明动量方程中的黏性项和浮力项系数分别可写成 Pr 和 $Ra Pr$ 。

3.22 研究训练 对习题 3.21 的同一 Boussinesq 问题，假设另有一个外部给定速度尺度 U ，改用 L/U 作为时间尺度。比较所得无量纲方程与采用热扩散尺度时的形式差异，并讨论：

1. 为什么两种无量纲形式都可以是正确的？
2. 哪一种形式更适合“外部强迫速度已知”的问题？
3. 哪一种形式更能突出热扩散时间尺度？

思考与讨论

1. 为什么无量纲化不仅是“消除单位”，而是重新组织物理问题？
2. 为什么同一个问题可以有多种正确的无量纲形式？
3. 在什么情况下， ρU^2 是合理的压强尺度？什么时候 $\mu U/L$ 更自然？
4. 为什么 Reynolds 数不是某一种流体的固定属性？
5. 为什么动力相似比单纯几何相似更严格？
6. 为什么实验数据通常更适合画成 C_D-Re ，而不是 F_D-U ？
7. 如果某个无量纲变量在主要流动区域中达到 10^6 ，这是否意味着所选特征尺度可能不理想？
8. 为什么边界层理论不能仅凭“ $1/Re$ 很小”就直接从无量纲 Navier-Stokes 方程得到？
9. 在数值模拟中，为什么无量纲化通常有利于比较不同工况？
10. 对一个完全陌生的流动问题，你会如何选择 L 、 U 、 T_c 和 P_c ？
11. 为什么动力相似的核心不是“永远匹配 Reynolds 数”，而是判断当前问题中哪些无量纲参数真正控制流动？
12. 在 Boussinesq 流动中，为什么选取 L^2/α 作为时间尺度会使 Pr 和 Ra 以一种特别自然的方式出现在方程中？