

第二章 黏性流体的控制方程

本章导言

第 1 章从物理层面认识了黏性、剪切应力、无滑移条件和 Reynolds 数。本章进一步回答一个更根本的问题：

如何用统一的数学方程描述黏性流体的运动？

对于连续介质尺度下的流体运动，控制方程来自几个基本物理定律：

1. 质量守恒；
2. 线动量守恒；
3. 角动量守恒；
4. 流体的本构关系。

其中，质量守恒给出连续性方程；线动量守恒给出 Cauchy 动量方程 (Cauchy momentum equation)；角动量守恒使经典连续介质中的 Cauchy 应力张量 (Cauchy stress tensor) 具有对称性；Newton 流体本构关系则建立黏性应力与速度变形率之间的联系。

把这些关系组合起来，就可以得到本书最核心的控制方程——**Navier-Stokes 方程**。

本章的重点不是机械记忆方程，而是理解：每一个方程来自什么物理定律；方程中每一项代表什么物理机制；黏性如何通过应力进入动量方程；压强与黏性应力为什么需要区别对待；为什么边界条件和初始条件与微分方程同样重要。

i 本章的核心路线与加强路线

对于 32 学时课程，**核心路线**为 2.1—2.14 节：从运动描述、质量守恒、应力与牵引出发，通过 Newton 流体本构关系封闭动量方程，得到不可压缩 Navier-Stokes 方程，并明确压强约束、初始条件和各类边界条件。学完这一路线，已经具备进入无量纲化、解析解和边界层理论的基础。

2.15—2.17 节属于**加强路线**。涡量方程把速度描述改写为旋转与输运的语言，机械能方程区分功率传递和不可逆耗散，“方程为什么难”则为第 8 章的湍流与数值模拟建立接口。这些内容可以选讲，但不改变本书以不可压缩 Newton 流体为主线的范围。

在第 3 章中，我们将进一步把这些控制方程无量纲化，并从方程中重新认识 Reynolds 数及其他无量纲参数。

学习目标

完成本章学习后，应能够：

1. 区分 Lagrange 描述 (Lagrangian description) 与 Euler 描述 (Eulerian description)，并熟练使用物质导数；
2. 写出质量守恒方程的一般形式和不可压缩形式；
3. 解释面力、牵引向量和 Cauchy 应力张量的物理意义；
4. 将总应力分解为压强部分和黏性应力部分；
5. 理解变形率张量与刚体转动之间的区别；
6. 写出 Newton 流体的本构关系，并理解本构关系在方程封闭中的作用；
7. 从 Cauchy 动量方程得到不可压缩 Newton 流体的 Navier-Stokes 方程；
8. 解释 Navier-Stokes 方程中非定常项、对流项、压强梯度项、黏性项和体力项的物理意义；
9. 写出二维和三维直角坐标系下的基本控制方程；
10. 区分初始条件、速度边界条件、应力边界条件和周期边界条件，并理解初边值问题的基本结构；
11. (加强) 从不可压缩 Navier-Stokes 方程得到涡量输运方程，并解释涡量对流、三维涡伸展和黏性扩散；
12. (加强) 从动量方程得到机械能方程，并区分应力功率、体力功率与黏性耗散。

2.1 流体运动的描述

2.1.1 Lagrange 描述与 Euler 描述

描述连续介质运动有两种基本方式。

Lagrange 描述。 Lagrange 描述跟踪每一个流体质点的运动。设某流体质点在初始时刻的位置为 X ，在时刻 t 的位置为 $x = \chi(X, t)$ 。因此，每一个流体质点都有自己的运动轨迹。这种描述方式在固体力学中非常自然，因为通常需要关心某一特定材料点经历了怎样的位移和变形。

Euler 描述。 Euler 描述不持续跟踪某一个流体质点，而是在固定空间位置研究流动物理量随时间的变化。例如，速度场、压强场和密度场分别写成 $u = u(x, t)$ 、 $p = p(x, t)$ 和 $\rho = \rho(x, t)$ 。流体力学的大多数控制方程都采用 Euler 描述。

i 两种描述关注的问题不同

Lagrange 描述问：“这个流体质点现在在哪里，它经历了什么？”

Euler 描述问：“这个空间位置现在有什么样的流体经过，速度和压强是多少？”

两种描述是等价的，但适用于不同的分析方式。

2.1.2 流体质点的加速度

在 Euler 描述中，速度是空间和时间的函数 $u = u(x, t)$ 。考虑一个随流体运动的质点，它所经历的速度变化为

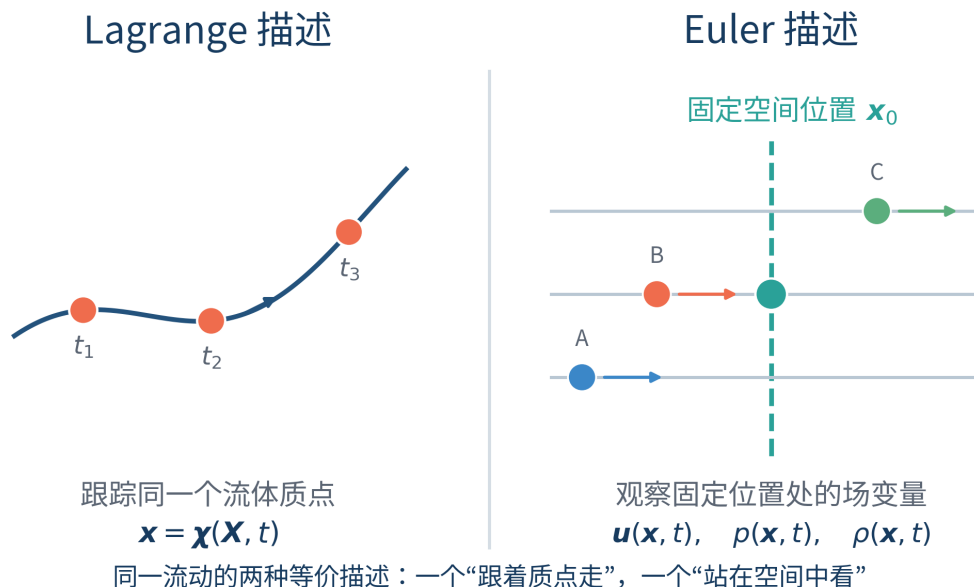


图 2.1: Lagrange 描述与 Euler 描述：前者跟踪同一个流体质点随时间的运动，后者在固定空间位置观察速度、压强和密度等场变量。

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \nabla u.$$

由于流体质点本身以局部流速运动，即 $dx/dt = u$ ，因此

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u. \quad (2.1)$$

这里

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \quad (2.2)$$

称为**物质导数** (material derivative)，也称**随体导数**。式 2.1 中， $\partial u/\partial t$ 是**局部加速度**，表示固定空间位置处的速度随时间变化； $u \cdot \nabla u$ 是**对流加速度**，表示流体质点穿过空间非均匀速度场时产生的加速度。

如果流动为稳态，则 $\partial u/\partial t = 0$ ；但即使流场稳态，对流加速度仍可能非零。例如稳态收缩管中，固定位置的速度不随时间变化，但流体质点进入更窄截面后速度增大，因此 $u \cdot \nabla u \neq 0$ 。

❗ 稳态流动不等于零加速度

稳态只意味着 $\partial/\partial t = 0$ 。只要速度在空间中变化，对流加速度仍然可能存在。

2.1.3 标量的物质导数

对于任意标量场 $\phi = \phi(x, t)$ ，随流体质点运动所观察到的变化率为

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi.$$

例如，流体质点经历的密度变化率为 $D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + u \cdot \nabla\rho$ 。物质导数将贯穿连续性方程、动量方程以及后续的涡量、温度和组分输运问题。

2.2 质量守恒

2.2.1 控制体中的质量守恒

取空间中一个固定控制体 V ，其边界为闭合控制面 S ，外法向单位向量为 n 。控制体内总质量为 $m = \int_V \rho dV$ 。

本书统一以 Q 表示体积流量，以 $\dot{m}$ 表示质量流率；对密度均匀的不可压缩流动，二者满足 $\dot{m} = \rho Q$ 。质量守恒要求：控制体内质量的变化率，加上通过控制面流出的净质量流率，等于零。因此

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S \rho u \cdot n dS = 0. \quad (2.3)$$

式 2.3 是质量守恒的积分形式。利用 Gauss 散度定理，

$$\oint_S \rho u \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot (\rho u) dV,$$

代入散度定理并合并积分后得到

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] dV = 0.$$

由于控制体可以任意选取，得到局部形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (2.4)$$

这就是连续性方程。

i 微元视角：为什么散度表示净质量流出？

图 2.2 从一个体积为 $dV = dx dy dz$ 的微小直角六面体出发，给出了质量通量在六个表面上的流入与流出。以 x 方向为例，左侧表面的流入质量流率为

$$(\rho u) dy dz,$$

右侧表面的流出质量流率为

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz.$$

因此, x 方向的净流出质量流率为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dV.$$

同理, y 和 z 方向分别贡献 $[\partial(\rho v)/\partial y]dV$ 与 $[\partial(\rho w)/\partial z]dV$ 。三个方向相加, 得到

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dV = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV.$$

因此, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ 可以直接理解为单位体积内质量通量的净流出率。这与前面的控制体积分推导完全等价, 但更直观地说明了散度的物理意义。

流体微元的质量通量：散度为何表示净流出率？

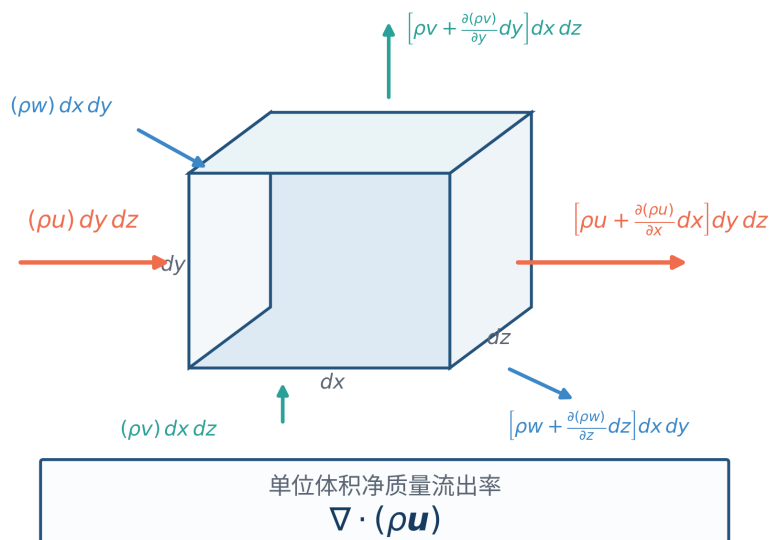


图 2.2: 流体微元六个表面上的质量通量。相对两侧表面上的通量差给出相应方向的净质量流出率, 三个方向相加形成 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ 。

2.2.2 连续性方程的物质导数形式

利用恒等式 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$, 式 2.4 可写成

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

也可写为 $(1/\rho)D\rho/Dt = -\nabla \cdot \mathbf{u}$ 。该式揭示了密度变化与局部体积膨胀或压缩之间的关系。

2.2.3 不可压缩流动

对于不可压缩流体微团，其体积在运动过程中保持不变，因此

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

式 2.6 是不可压缩流动最常用的运动学约束。若密度为常数 $\rho = \text{const.}$ ，则由连续性方程自然得到 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。但概念上需要区分：**密度常数**是物性或流动状态的描述；**不可压缩条件**强调流体微团体积不发生变化。

在本书后续的大部分内容中，主要讨论常密度不可压缩 Newton 流体，因此连续性方程将主要写成 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。

2.2.4 直角坐标形式

三维直角坐标系中 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ，不可压缩连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.7)$$

二维流动中若 $w = 0$ 且所有物理量与 z 无关，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

例 2.1 判断速度场是否满足不可压缩条件

给定二维速度场 $u = ax$ 、 $v = -ay$ ，其中 a 为常数。由于 $\partial u / \partial x = a$ 、 $\partial v / \partial y = -a$ ，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

该速度场满足二维不可压缩连续性方程。这个例子也说明：**不可压缩并不要求每个速度分量分别没有空间变化，而只要求速度场的散度为零。**

2.3 面力、牵引向量与 Cauchy 应力张量

2.3.1 体力与面力

作用在流体微团上的力通常分为两类。

体力。体力作用于流体体积内部，其大小通常与质量或体积成正比。常见体力包括重力、电磁力以及某些旋转参考系中的惯性力。若单位质量体力为 $\mathbf{b}$ ，则单位体积体力为 $\rho \mathbf{b}$ 。本书统一用 $\mathbf{b}$ 表示单位质量体力，把普通斜体 f 留给频率或一般函数。

面力。面力作用在流体微团的边界表面上。对于一个法向为 n 的微小表面，单位面积所受的力记为 $t^{(n)}$ ，称为**牵引向量** (traction vector)。它一般既包含法向分量，也包含切向分量。

2.3.2 Cauchy 应力定理

连续介质力学中，Cauchy 应力定理给出

$$t^{(n)} = \sigma \cdot n, \quad (2.9)$$

应力张量写成

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

称为 **Cauchy 应力张量**。式 2.9 的重要意义在于，任意方向表面上的牵引向量都可由同一个二阶应力张量 σ 表示：给定截面的单位法向 n 后， $\sigma \cdot n$ 就给出该截面上的牵引向量。改变截面方向只需改变 n ，无须重新定义一套应力。

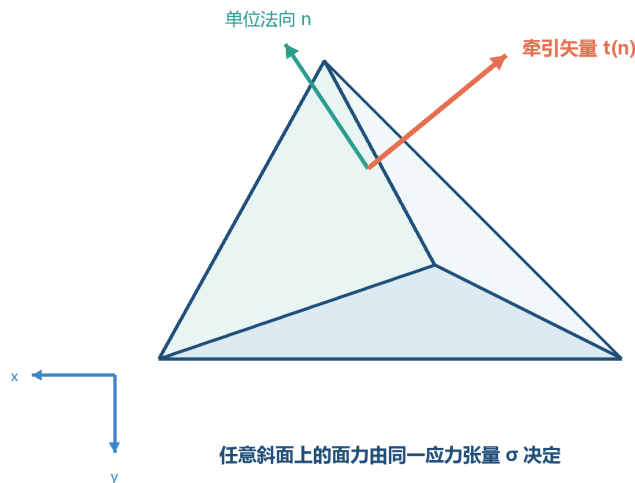


图 2.3: Cauchy 四面体上的法向与牵引向量：任意斜面的单位法向为 n ，该面上的牵引向量由 $t^{(n)} = \sigma \cdot n$ 确定。

为了避免应力分量下标的歧义，本书采用与式 2.9 一致的约定

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j.$$

因此， σ_{ij} 的第二个下标 j 表示所作用表面的法向方向，第一个下标 i 表示力的方向。例如， τ_{xy} 表示法向沿 y 方向的表面上、沿 x 方向的剪切应力。图 2.4 用一个流体微元直观展示了这一约定。

应力张量分量的下标约定

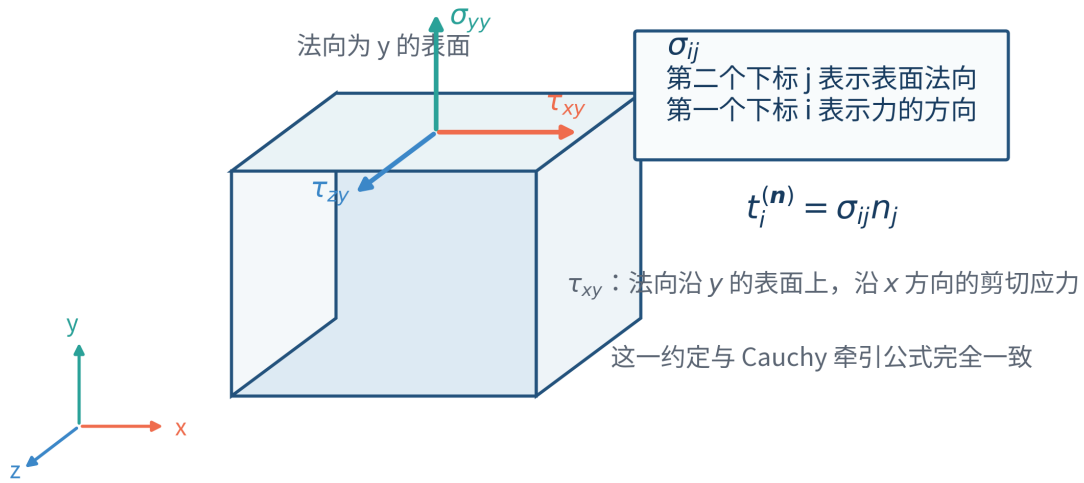


图 2.4: 应力张量分量的下标约定。对于法向沿 y 的表面， σ_{yy} 是法向应力， τ_{xy} 和 τ_{zy} 分别是沿 x 和 z 方向的剪切应力。

2.3.3 应力张量的对称性

在经典连续介质理论中，若不考虑偶应力等更复杂效应，角动量守恒要求

$$\sigma = \sigma^T, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

三维应力张量虽然形式上有 9 个分量，但独立分量只有 6 个。

2.4 压强与黏性应力

2.4.1 总应力的分解

对于普通流体，总应力通常写成

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (2.10)$$

其中 p 为压强， I 为单位张量， τ 为黏性应力张量，也称偏应力张量。这里采用流体力学中常用的符号约定： $p > 0$ 表示压缩压强，因此压强部分在应力张量中写成 $-pI$ 。

压强是各向同性的，即压强对任意方向截面都只产生法向压缩作用；黏性应力则与流体的变形率有关，可以包含切向剪切应力以及与黏性变形有关的附加法向应力。

2.4.2 静止流体中的应力

如果流体静止 $u = 0$ 且不存在变形率，则 Newton 流体的黏性应力为零，即 $\tau = 0$ ，因此

$$\sigma = -pI.$$

这就是流体静力学中的应力状态。由此也可以看出：压强并不是“黏性的一部分”。即使理想无黏流体，也可以具有非零压强。

2.5 流体微团的运动：平移、转动与变形

2.5.1 速度梯度张量

流场在某一点附近的空问变化由速度梯度张量 ∇u 描述。它可以分解为对称部分和反对称部分：

$$\nabla u = D + W, \quad (2.11)$$

对称部分和反对称部分分别定义为

$$D = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (2.12)$$

称为**变形率张量** (rate-of-deformation tensor)，而 $W = \frac{1}{2} [\nabla u - (\nabla u)^T]$ 称为**旋转率张量**。本章首次出现的粗体 D 固定表示变形率张量；后文普通斜体 D 表示直径，正体 D/Dt 表示物质导数。 D 描述流体微团的瞬时形变速率， W 则与局部刚体式转动有关。

2.5.2 为什么黏性应力与变形率有关

考虑一个流体微团整体作刚体平移或刚体转动。如果流体微团之间没有相对变形，那么这种运动本身不应产生黏性剪切应力。因此，对于各向同性 Newton 流体，黏性应力必须依赖于 D ，而不能依赖于纯刚体转动部分 W 。这正是三维 Newton 流体本构关系的基础。

i 从第 1 章到第 2 章

第 1 章中说过：黏性抵抗的不是速度本身，而是相对变形。

现在可以把这句话写成更严格的张量语言：Newton 流体的黏性应力由变形率张量 D 决定。

2.5.3 变形率张量的分量

在直角坐标系中，

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

其迹为 $\text{tr}(D) = \nabla \cdot u$ 。因此，对于不可压缩流动， $\text{tr}(D) = 0$ 。

2.6 Newton 流体的本构关系

! 为什么仅有守恒定律还不能求解流动？

质量守恒和动量守恒是对所有经典连续介质都成立的普适定律，但 Cauchy 动量方程中仍包含未知应力 σ 。如果不知道材料的应力如何响应变形，方程组仍然没有封闭。

对于 Newton 流体，本构关系把黏性应力与变形率联系起来。因而可以把这一建模逻辑概括为

守恒定律 + 本构关系 = 封闭的物理模型。

Navier-Stokes 方程正是质量守恒、动量守恒与 Newton 流体本构关系共同作用的结果。

2.6.1 不可压缩 Newton 流体

本书主要讨论各向同性、不可压缩 Newton 流体。此时 $\nabla \cdot u = 0$ ，黏性应力与变形率之间的线性本构关系为

$$\tau = 2\mu D \quad (2.13)$$

其中 μ 为动力黏度。这就是本书后续统一采用的 Newton 流体本构关系；它只依赖变形率，不会把刚体平移或刚体转动误认为黏性变形。

i 拓展：一般 Newton 流体与第二黏性系数

若允许体积发生变化，各向同性 Newton 流体的一般线性本构关系写成

$$\tau = 2\mu D + \lambda(\nabla \cdot u)I, \quad (2.14)$$

其中 λ 为第二黏性系数，与体积变形产生的黏性应力有关。不可压缩条件使 $\nabla \cdot u = 0$ ，因而这一附加项自动消失。第二黏性系数属于可压缩流体本构问题，本书不作系统展开。

2.6.2 与简单剪切公式的联系

考虑简单平行流动 $u = (u(y), 0, 0)$ 。此时 $D_{xy} = D_{yx} = \frac{1}{2} du/dy$ ，因此 $\tau_{xy} = 2\mu D_{xy} = \mu du/dy$ ，正好回到第 1 章的 Newton 黏性定律。

也就是说：第 1 章的一维剪切公式，是三维 Newton 流体本构关系在简单流动中的特殊情形。

2.6.3 不可压缩 Newton 流体的应力张量

将式 2.13 代入式 2.10，得到

$$\sigma = -pI + 2\mu D \quad (2.15)$$

这条关系将应力与速度场和压强场联系起来，是从一般动量守恒走向 Navier–Stokes 方程的关键一步。

2.7 线动量守恒与 Cauchy 动量方程

2.7.1 Newton 第二定律在连续介质中的形式

对一个流体系统，Newton 第二定律要求“质量 $\times$ 加速度 = 所受合力”。为了看清局部动量方程中 $\nabla \cdot \sigma$ 的来源，取一个随流体一起运动的物质体 $V(t)$ ，其边界为 $S(t)$ ，外法向为 n 。物质体的总动量为

$$P(t) = \int_{V(t)} \rho u \, dV.$$

物质体所受的力包括边界上的面力和体积内的体力，因此 Newton 第二定律的积分形式为

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u \, dV = \int_{S(t)} t^{(n)} \, dA + \int_{V(t)} \rho b \, dV. \quad (2.16)$$

由 Cauchy 应力定理 $t^{(n)} = \sigma \cdot n$ ，再对面力积分应用 Gauss 定理，可得

$$\int_{S(t)} t^{(n)} \, dA = \int_{S(t)} \sigma \cdot n \, dA = \int_{V(t)} \nabla \cdot \sigma \, dV. \quad (2.17)$$

这一步把作用在边界上的合面力转换为体积积分。因此， $\nabla \cdot \sigma$ 表示单位体积所受的净表面力，并不是人为加入动量方程的一项。

因为 $V(t)$ 是物质体，结合质量守恒可将其动量变化率写成

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u dV = \int_{V(t)} \rho \frac{Du}{Dt} dV. \quad (2.18)$$

将式 2.17 和式 2.18 代入式 2.16，得到

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \nabla \cdot \sigma - \rho b \right) dV = 0.$$

由于所取物质体是任意的，括号内的被积函数必须处处为零，于是得到局部微分形式

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho b \quad (2.19)$$

这就是 **Cauchy 动量方程**。从整体动量平衡到局部方程的推导可写为

$$\text{动量变化率} = \text{面力} + \text{体力} \xrightarrow{t^{(n)} = \sigma \cdot n, \text{ Gauss 定理}} \rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho b.$$

式 2.19 对一般经典连续介质成立，并不局限于 Newton 流体。这里没有展开一般控制体形式的 Reynolds 输运定理；采用随流体运动的物质体，已经足以说明局部动量方程各项的物理来源。

i 微元分量视角：应力散度从哪里来？

Gauss 定理给出的 $\nabla \cdot \sigma$ 也可以直接从微小六面体的相对表面受力看出来。以 x 方向为例，按照前述下标约定，法向分别沿 x 、 y 、 z 的三个表面上，沿 x 方向的应力分量分别为 σ_{xx} 、 σ_{xy} 和 σ_{xz} 。相对两侧表面的应力差给出

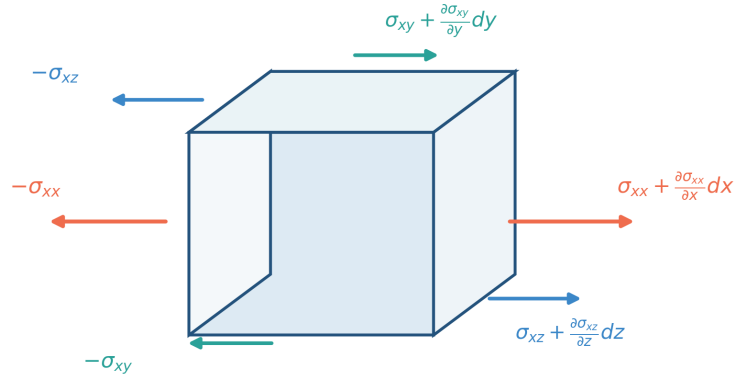
$$F_x^{(S)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV = (\nabla \cdot \sigma)_x dV.$$

y 和 z 方向完全类似。因此，六个表面上的净表面力除以体积，正是应力张量的散度。图 2.5 把这一关系画成了微元受力图。

微元六个面上的表面力如何汇成应力散度？

$$\nabla \cdot \sigma$$

图中只显示沿 x 方向的应力分量；y、z 方向完全类似



x 方向净表面力

$$F_x^{(S)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV = (\nabla \cdot \sigma)_x dV$$

图 2.5: 流体微元在 x 方向的表面力平衡。相对表面上的应力差形成 $\partial \sigma_{xx}/\partial x$ 、 $\partial \sigma_{xy}/\partial y$ 和 $\partial \sigma_{xz}/\partial z$ ，三者相加即为 $(\nabla \cdot \sigma)_x$ 。

2.7.2 代入应力分解

由 $\sigma = -pI + \tau$ ，有 $\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$ 。于是 Cauchy 动量方程变为

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho b. \quad (2.20)$$

这个形式已经清楚地区分了压强作用、黏性作用和体力作用。

2.8 Navier-Stokes 方程

2.8.1 不可压缩、常黏度 Newton 流体

对于不可压缩 Newton 流体， $\tau = 2\mu D$ 。若 μ 为常数，由

$$\tau = \mu [\nabla u + (\nabla u)^T]$$

逐项取散度可得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau &= \mu \nabla \cdot (\nabla u) + \mu \nabla \cdot (\nabla u)^T \\ &= \mu \nabla^2 u + \mu \nabla (\nabla \cdot u). \end{aligned}$$

对于不可压缩流动, $\nabla \cdot u = 0$, 因此

$$\nabla \cdot \tau = \mu \nabla^2 u.$$

Navier–Stokes 方程中的 Laplace 算子并非经验加入, 而是由 **Newton** 流体本构关系、常黏度假设和不可压缩条件共同导出。将这一结果代回动量方程, 得到

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho b \quad (2.21)$$

连同连续性方程

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.22)$$

共同构成不可压缩 Newton 流体的基本控制方程, 即本书后续反复使用的 **Navier–Stokes** 方程组。

2.8.2 Navier–Stokes 方程中各项的物理意义

将式 2.21 写成

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{局部加速度}} + \underbrace{\rho u \cdot \nabla u}_{\text{对流加速度}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{压强梯度}} + \underbrace{\mu \nabla^2 u}_{\text{黏性动量扩散}} + \underbrace{\rho b}_{\text{体力}}.$$

每一项对应一种明确的物理机制。

1. **非定常项。** $\rho \partial u / \partial t$ 描述固定空间位置处速度随时间的变化。
2. **对流项。** $\rho u \cdot \nabla u$ 描述流体质点运动到不同空间位置后, 由于速度场空间非均匀而产生的加速度。该项是非线性的, 也是 Navier–Stokes 方程复杂性的主要来源之一。
3. **压强梯度项。** $-\nabla p$ 表示压强空间变化所产生的单位体积力, 流体会倾向于从高压区域向低压区域加速。
4. **黏性项。** $\mu \nabla^2 u$ 描述黏性引起的动量扩散; 对于常密度流体, 在单位质量形式中写成 $\nu \nabla^2 u$ 。
5. **体力项。** ρb 可表示重力、电磁力等体积作用。

2.8.3 单位质量形式

两边除以密度 ρ , 并定义 $\nu = \mu / \rho$, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + b \quad (2.23)$$

该形式在理论分析中非常常见, 因为它直接突出运动黏度 ν 的扩散作用。

2.8.4 一个值得反复问的问题：哪些项在平衡？

Navier-Stokes 方程的每一项并不在所有问题中都同样重要。例如，某些稳态流动中非定常项为零；某些充分发展平行流中对流项可以为零；低 Reynolds 数流动中惯性项可能远小于黏性项；高 Reynolds 数外流远离壁面时黏性项可能很小；边界层中虽然整体 Reynolds 数很大，壁面法向的黏性扩散却仍然与惯性同阶。

因此，学习 Navier-Stokes 方程的目标不是“把五项都背下来”，而是逐渐具备判断：**对于一个具体流动，哪些项存在？哪些项重要？哪些项形成主导平衡？**第 3 章的无量纲化和第 6 章的尺度分析将系统回答这个问题。

2.9 直角坐标系中的 Navier-Stokes 方程

对于三维不可压缩 Newton 流体， $u = (u, v, w)$ 。连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

x 方向动量方程为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho b_x. \quad (2.24)$$

y 方向动量方程为

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho b_y. \quad (2.25)$$

z 方向动量方程为

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho b_z. \quad (2.26)$$

虽然分量形式较长，但其结构与矢量形式完全一致。

2.10 二维不可压缩流动

对于二维流动， $u = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$ ，且 $\partial/\partial z = 0$ 。连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

x 方向动量方程为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho b_x$$

y 方向动量方程为

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho b_y$$

这些方程将在后面的 Couette 流、Poiseuille 流、边界层和二维绕流问题中反复使用。

2.11 方程简化的第一步：先利用流动物理条件

在真正求解 Navier–Stokes 方程时，第一步通常不是立刻积分，而是根据问题的几何和物理条件判断哪些变量依赖关系成立。

例如考虑二维稳态、充分发展的平行流 $u = (u(y), 0, 0)$ ，可直接得到 $\partial/\partial t = 0$ 、 $v = 0$ 、 $\partial u/\partial x = 0$ ，于是许多项自动消失。例如对流项 $u \partial u/\partial x + v \partial u/\partial y$ 变为零。

由此可见，方程简化首先依赖物理假设和几何特征，而不是代数技巧。第 4 章将系统训练这种从流动条件识别变量依赖关系、再删去零项的方法。

例 2.2 一维稳态平行流的方程简化

考虑两无限大平行平板之间的稳态流动，假设 $u = (u(y), 0, 0)$ ，且忽略 x 方向体力。连续性方程自动满足， x 方向动量方程简化为

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (2.27)$$

式 2.27 说明，在这种平行流动中，压强梯度与黏性动量扩散构成主要平衡。若进一步有 $dp/dx = 0$ ，则 $d^2 u/dy^2 = 0$ ，速度剖面为线性分布，这就是后续将讨论的 Couette 流；若 $dp/dx \neq 0$ ，则速度剖面通常呈二次函数形式，这将导向 Poiseuille 流。

本例暂不求解，只强调一个方法：先根据流动物理条件删去必然为零的项，再求解剩余方程。

2.12 压强在不可压缩流动中的作用

2.12.1 压强作为约束变量

在常密度不可压缩流动模型中，压强具有一个容易被忽略的重要特点：压强不是由独立状态方程给出的演化变量，而主要承担维持速度场满足不可压缩约束的动力学作用。

连续性方程要求 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，而动量方程中的压强梯度 $-\nabla p$ 会不断调整流体加速度，使速度场在演化过程中保持满足不可压缩约束。

在数值流体力学中，这一特点表现得尤其明显：不可压缩 Navier–Stokes 方程中的压强必须与速度场耦合求解。速度和压强并非两个彼此独立的问题；连续性方程约束速度场，动量方程决定其演化，而压强梯度负责使两者相容。第 8 章将从压强—速度耦合的角度再次讨论这一点。

2.12.2 压强 Poisson 方程

压强的约束作用可以从方程中直接看出。对单位质量形式的不可压缩 Navier–Stokes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 u + b$$

两边取散度。由于 $\nabla \cdot u = 0$ ，非稳态项和常黏度扩散项的散度均为零，于是得到

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot [(u \cdot \nabla)u] + \rho \nabla \cdot b. \quad (2.28)$$

进一步利用不可压缩条件，可以把非线性源项写成

$$\nabla^2 p = -\rho \sum_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho \nabla \cdot b. \quad (2.29)$$

式 2.28 表明，压强场在每一时刻都与整个速度梯度场相联系；它不是仅由某一点的局部速度代数地决定。对于均匀重力等无散体力， $\nabla \cdot b = 0$ ，Poisson 方程的源项主要来自速度对流产生的空间变化。数值方法常先得到一个未必满足零散度的暂定速度，再通过求解与式 2.28 同类的椭圆方程获得压强或压强修正，并用其梯度把速度校正到不可压缩空间。这正是第 8 章压强—速度耦合和投影思想的连续方程基础。

! 压强 Poisson 方程不是额外增加的一条独立定律

它由动量方程和不可压缩约束共同推出，必须配合与原初边值问题相容的压强边界信息。固壁处的压强法向梯度通常由动量方程在法向上的投影得到，而不能脱离速度或牵引条件任意指定。

2.12.3 压强基准与边界信息

动量方程中只出现压强梯度，因此把压强替换为 $p + C$ 不会改变速度场，其中 C 为空间常数；在非稳态问题中，每一时刻的这个常数还可以不同。也就是说，如果边界条件没有给出绝对压强基准，压强只确定到一个空间均匀的附加常数。实际求解时通常指定某一点的参考压强，或规定全域平均压强为零，以消除这种不唯一性。这里的结论针对常密度不可压缩力学模型；若涉及可压缩性、空化或热力学耦合，绝对压强仍可能具有直接物理意义。

2.13 初始条件与边界条件

控制方程本身通常不足以唯一确定一个流动问题，还必须给出相应的初始条件和边界条件。

2.13.1 初始条件

对于非稳态问题，需要给定初始时刻的速度场 $u(x, 0) = u_0(x)$ 。如果问题还包含其他演化变量，则需要相应初始条件。

2.13.2 固体壁面速度条件

若固体壁面速度为 U_w ，对于普通宏观黏性流动通常采用无滑移、无穿透条件：

$$u = U_w \quad (2.30)$$

静止固壁上 $u = 0$ 。这是典型的 **Dirichlet 型速度边界条件**。

2.13.3 应力边界条件

在某些边界上，已知的不是速度，而是表面牵引力 $t^{(n)} = \sigma \cdot n$ ，因此可以指定

$$\sigma \cdot n = t_b. \quad (2.31)$$

这类条件称为**应力边界条件**或**牵引边界条件**。例如自由表面问题中，界面两侧的法向应力和切向应力关系通常需要通过应力边界条件表达。

! 全书约定：壁面剪切应力的正负号

本书区分以下三类量，不能只凭“剪切应力”四个字互相替代：

1. 流体内部的应力分量。例如简单平行流中

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

其正负由所选 x, y 坐标方向决定。

2. 壁面两侧的切向牵引。令 n_f 为流体域的外法向，则壁面对流体的牵引为 $t_{w \rightarrow f} = \sigma \cdot n_f$ ，流体对壁面的反作用为 $t_{f \rightarrow w} = -t_{w \rightarrow f}$ 。二者方向相反。若需要投影到局部切向，单位切向量统一记为 e_t ，例如 $t_{w \rightarrow f, t} = t_{w \rightarrow f} \cdot e_t$ ；粗体 t 只保留给牵引向量。对于法向平行于 y 轴的平面壁， x 向牵引分量为 $t_{w \rightarrow f, x} = \tau_{xy} n_{f, y}$ ；因此上下壁即使具有相同的内部 τ_{xy} ，也会因 $n_{f, y} = \pm 1$ 而得到不同的牵引方向。
3. 只关心大小时。明确写成 $|\tau_w|$ 。由壁面剪切构造的摩擦速度始终取非负尺度：

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}.$$

在平面边界层问题中，本书通常令局部 x 沿参考来流方向、 y 从壁面指向流体，并定义有符号量 $\tau_w = \mu(\partial u_x / \partial y)_w$ 。正常附着流中 $\tau_w > 0$ ；分离点 $\tau_w = 0$ ；近壁回流时 $\tau_w < 0$ 。对于 Stokes 第一问题， $\partial u / \partial y < 0$ ，所以壁面处内部应力分量 $\tau_{xy,w}$ 为负，流体对运动壁面的作用阻碍壁面运动。若采用全局坐标、上下壁或曲面法向，则应回到 $\sigma \cdot n_f$ 判断壁面对流体的牵引方向。

2.13.4 入口与出口条件

在工程流动和 CFD 中，常见入口条件包括指定速度分布、质量流率或体积流量；常见出口条件可能包括指定压强、法向应力，或在充分发展假设下使用近似梯度条件。出口条件不能随意指定，而必须与控制方程的数学性质和物理问题相容。

2.13.5 对称边界

若某一平面为流动对称面，则通常有法向速度为零、切向速度的法向梯度为零。例如以 $y = 0$ 为对称面，

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

对称条件在通道流、管流和计算域简化中非常常见。

2.13.6 周期边界条件

当几何和流动在某一方向重复，或研究对象在该方向上统计均匀时，可以只计算一个周期单元。若第 i 个方向的周期长度为 L_i 、单位向量为 e_i ，速度的周期条件写成

$$u(x + L_i e_i, t) = u(x, t), \quad (2.32)$$

并要求相对两侧对应点的速度导数和通量相容。若没有外加平均压强梯度，压强也可采用同样的周期条件。对于压强驱动的周期通道或管流，通常将压强分解为沿流向线性变化的平均部分与周期余量 p_{per} ；此时只有 p_{per} 满足周期条件，线性部分则提供维持流动的平均压强梯度。

周期边界不是“边界上没有条件”，而是把一侧的未知量与另一侧对应点配对。它常用于充分发展流动、理想化均匀方向以及第 8 章的 DNS 和 LES；使用时仍需检查净质量流率、平均压强梯度或体积流量约束是否彼此相容。

2.13.7 方程—未知量—条件总表

对于三维、常密度、不可压缩 Newton 流体，基本未知量是三个速度分量和压强，共四个标量场。连续性方程与三个动量分量方程在数量上与未知量相配，但这并不自动保证问题具有唯一解；还必须给出彼此相容的初始条件、边界条件和压强基准。

类别	数量	典型表达	在初边值问题中的作用
未知量	4 个标量场	u, v, w, p	求解目标；速度与压强需要耦合确定
连续性方程	1 个标量方程	$\nabla \cdot u = 0$	约束速度场保持不可压缩
动量方程	3 个标量方程	$\rho Du/Dt = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho b$	决定三个速度分量的动量演化，并通过压强梯度满足连续性约束
初始条件	非稳态问题需要	$u(x, 0) = u_0(x)$, 且 $\nabla \cdot u_0 = 0$	给出演化起点；压强通常不需要独立的初始条件
边界条件	随边界类型而定	指定速度、牵引力、入口体积流量或质量流率、出口压强、对称条件或周期配对等	使控制方程对应具体物理问题；不能在同一边界上任意重复指定互不相容的条件
压强基准	通常需要 1 个	例如 $p(x_{\text{ref}}) = 0$ 或 $\int_V p dV = 0$	当边界未给定绝对压强时，消除压强的附加常数不唯一性

这张表强调的是方程、未知量与条件必须作为一个整体理解。仅写出 Navier–Stokes 方程，还没有完整定义一个可求解的流动问题。

2.14 重力与修正压强

若体力只有均匀重力 $b = g$ ，则 Navier–Stokes 方程为

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho g.$$

对于常密度流体，可将重力势写入压强。若 $g = -\nabla \Phi_g$ ，定义修正压强 $p^* = p + \rho \Phi_g$ ，则动量方程可写成

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 u.$$

因此，对于常密度不可压缩流动，均匀重力可以吸收到修正压强中；若密度发生变化，例如浮力驱动流动，这种合并不再能直接沿用，必须重新检查压强项与体力项的关系。

2.15 加强内容：涡量输运方程

前面主要从速度和压强描述流动。为了把黏性扩散、边界层、分离剪切层和湍流涡结构联系起来，引入**涡量**（vorticity）

$$\omega = \nabla \times u. \quad (2.33)$$

涡量等于流体微团局部刚体转动角速度的两倍，单位为 s^{-1} 。它描述流体微团的局部旋转趋势，但不能单独代表流体微团的变形或黏性应力。

2.15.1 从 Navier–Stokes 方程取旋度

考虑常密度、常黏度、不可压缩 Newton 流体：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u + b, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

对动量方程两侧取旋度。压强梯度满足

$$\nabla \times (\nabla p) = 0,$$

因此常密度流动中的压强梯度不会直接出现在涡量方程中。再利用

$$\nabla \times [(u \cdot \nabla)u] = (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u$$

以及旋度与常系数 Laplace 算子可以交换，得到

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u + \nu\nabla^2\omega + \nabla \times b. \quad (2.34)$$

若单位质量体力为均匀重力，或可写为势函数的梯度，则 $\nabla \times b = 0$ 。此时

$$\boxed{\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u + \nu\nabla^2\omega}. \quad (2.35)$$

这正是本书后续主要使用的不可压缩涡量输运方程。若密度可变，还会出现压强梯度与密度梯度不平行造成的斜压涡量生成等附加机制，本书不在此展开。

2.15.2 三项物理机制

式 2.35 可以按三种机制理解：

1. **涡量随流输运**。物质导数 $D\omega/Dt$ 表示跟随流体质点观察到的涡量变化，对流并不是涡量凭空消失或产生，而是把已有涡量带到其他位置。
2. **三维涡伸展与倾斜**。 $(\omega \cdot \nabla)u$ 表示速度沿涡量方向的变化。流体微团沿涡线方向被拉伸时，涡量大小可以增大；速度梯度也可以改变涡量方向。这一项是三维湍流形成更细小旋涡结构的重要机制。
3. **黏性扩散**。 $\nu \nabla^2 \omega$ 使涡量从强涡量区向周围扩散，并在小尺度上平滑尖锐梯度。这与第 1 章“黏性是动量的分子扩散”完全一致，只是此处改用涡量语言描述。

! 涡量不等于黏性应力

简单剪切流 $u = (\gamma y, 0, 0)$ 具有 $\omega = -\gamma e_z$ ，同时 $\tau_{xy} = \mu\gamma$ 。但刚体转动 $u = (-\Omega y, \Omega x, 0)$ 虽然具有 $\omega = 2\Omega e_z$ ，其变形率张量却为 $D = 0$ ，因而黏性应力为零。所以涡量衡量局部旋转，Newton 黏性应力则由变形率决定；两者有关，但不能互相替代。

2.15.3 二维不可压缩流动

对于二维流动

$$u = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0), \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

涡量只有垂直于流动平面的分量：

$$\omega = \omega e_z, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.36)$$

此时

$$(\omega \cdot \nabla)u = \omega \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

所以在无旋体力作用下，涡量方程简化为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (2.37)$$

二维流动没有三维涡伸展项，涡量只通过对流搬运和黏性扩散发生变化。若再令 $\nu = 0$ ，则 $D\omega/Dt = 0$ ，即二维无黏流动中的涡量随流体质点守恒。三维流动即使在 $\nu \rightarrow 0$ 时，涡伸展仍可改变涡量大小，这正是二维与三维涡动力学的重要差别。

2.15.4 固壁为什么是强涡量区域

涡量方程本身没有显式写出“壁面生成涡量”，但无滑移边界条件会在固壁附近建立很大的切向速度梯度。对于沿 x 方向的薄边界层，

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\frac{\partial u}{\partial y},$$

因此边界层可以看成贴附在固壁附近的强涡量薄层。压强梯度和壁面运动通过边界条件决定近壁速度梯度，黏性再把这些涡量向流体内部扩散；外部流动则通过对流把涡量带向下游。

这一图像把后续章节连成一条主线：

- **第 4 章：** Stokes 第一问题中 $\omega_z = -\partial u / \partial y$ ，并满足 $\partial \omega_z / \partial t = \nu \partial^2 \omega_z / \partial y^2$ ，即壁面涡量向外进行非定常黏性扩散；
- **第 6 章：** 高 Reynolds 数外流的大部分涡量集中在薄边界层内；
- **第 7 章：** 分离后，壁面附近的涡量进入自由剪切层，继而卷起并形成尾迹旋涡；
- **第 8 章：** 三维涡伸展不断放大和重排涡量，形成多尺度结构，而黏性最终在最小尺度平滑涡量梯度并耗散机械能。

因此，“黏性动量扩散”和“涡量输运”并不是两套不同理论，而是对同一 Navier-Stokes 动力学的两种互补描述。

2.16 加强内容：机械能收支与黏性耗散

第 1 章已经指出，黏性既输运动量，也使宏观机械能不可逆地转化为内能。前一种作用直接出现在动量方程的黏性项中，后一种作用则要通过机械能收支才能看清。本节只讨论核心物理结构，不展开可压缩流动和热力学能量方程。

2.16.1 从动量方程得到机械能方程

定义单位质量动能

$$k_m = \frac{1}{2} u \cdot u. \quad (2.38)$$

从 Cauchy 动量方程

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho b$$

出发，两边点乘速度 u 。左端满足

$$u \cdot \frac{Du}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right) = \frac{Dk_m}{Dt},$$

应力项则可用乘积法则写成

$$u \cdot (\nabla \cdot \sigma) = \nabla \cdot (\sigma \cdot u) - \sigma : \nabla u. \quad (2.39)$$

对于不可压缩 Newton 流体, $\sigma = -pI + \tau$, $\tau = 2\mu D$, 而对称张量 τ 与反对称的刚体转动部分点乘为零。因此

$$\sigma : \nabla u = \tau : D = 2\mu D : D \equiv \Phi, \quad (2.40)$$

其中 Φ 称为单位体积黏性耗散率 (volumetric viscous dissipation rate), 单位为 W/m^3 。于是局部机械能方程为

$$\boxed{\rho \frac{Dk_m}{Dt} = \nabla \cdot (\sigma \cdot u) + \rho b \cdot u - \Phi}. \quad (2.41)$$

利用不可压缩条件, 也可把它写成更容易辨认压强功率和黏性应力功率的守恒形式:

$$\frac{\partial(\rho k_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k_m u) = -\nabla \cdot (pu) + \nabla \cdot (\tau \cdot u) + \rho b \cdot u - \Phi. \quad (2.42)$$

各项的意义分别是: 动能的局部变化与对流输运、压强所作的功、黏性应力通过边界传递的功、体力功率, 以及机械能的不可逆耗散。压强项和黏性应力功率项都以散度形式出现, 主要负责在空间或边界之间传递机械能; 真正具有确定负号的体积损失项是 $-\Phi$ 。

对于常黏度不可压缩流体, 动量方程中的黏性项还满足局部恒等式

$$\mu u \cdot \nabla^2 u = \nabla \cdot (\tau \cdot u) - \Phi. \quad (2.43)$$

等号右侧第一项是黏性应力功的空间输运, 可以在某一点为正或为负; 第二项 $-\Phi \leq 0$ 才是不可逆的局部机械能损失。因此, 等号左侧的整个黏性功率密度也没有确定符号: 黏性可以从邻近区域向某一点输入动能, 同时仍在该点发生正定耗散。

图 2.7 将这一收支关系概括为一个“机械能账本”: 压强、黏性应力和体力都可以向流体输入或从流体取走机械能; 机械能也可以通过边界和空间输运重新分配; 只有 Φ 对普通 Newton 流体始终非负, 它把宏观机械能不可逆地转化为内能。

2.16.2 整体收支与边界功率

对随流体一起运动的物质体积 $V(t)$ 积分, 式 2.41 给出

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho k_m dV = \int_{\partial V(t)} u \cdot (\sigma \cdot n) dA + \int_{V(t)} \rho b \cdot u dV - \int_{V(t)} \Phi dV. \quad (2.44)$$

这个式子可以直接读成

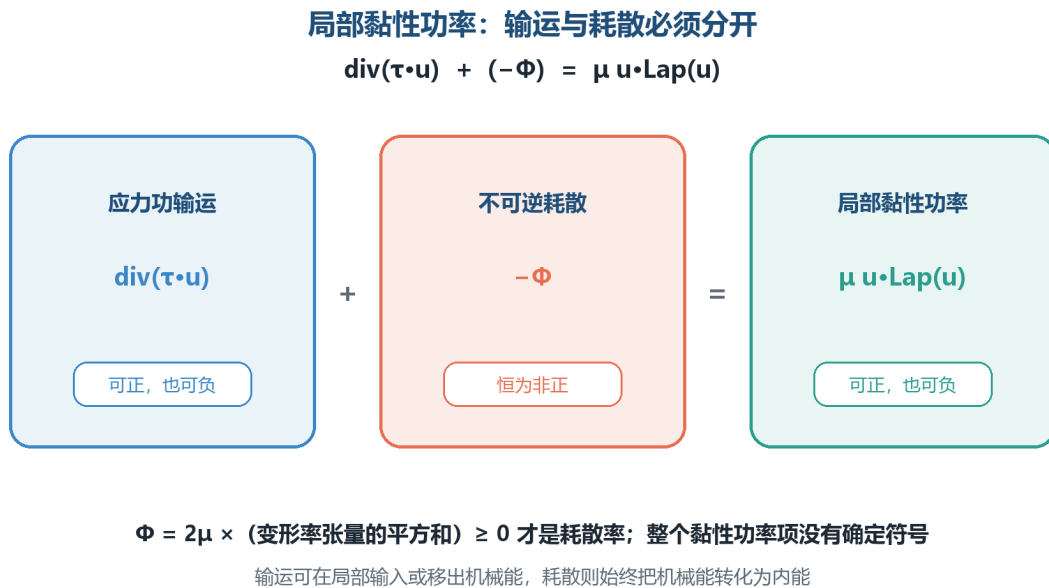


图 2.6: 局部黏性功率的分解。应力功输运项可正可负，耗散项 $-\Phi$ 恒为非正，因此两者之和 $\mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$ 也可正可负，不能直接作为耗散率。

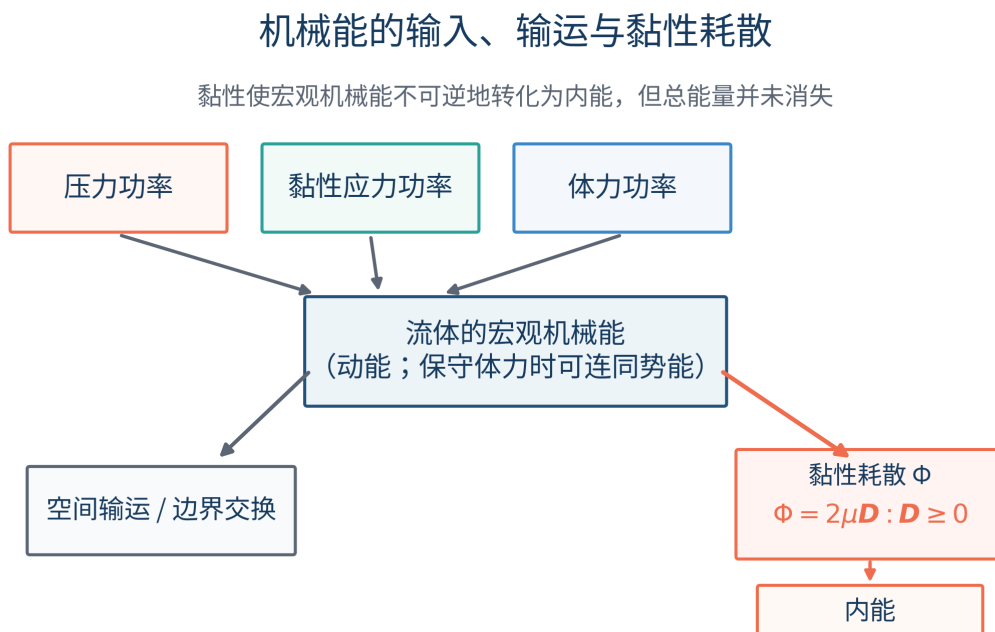


图 2.7: 机械能的输入、输运与黏性耗散。压强功率、黏性应力功率和体力功率改变宏观机械能；机械能可以通过空间输运和边界交换重新分配，并通过正定的黏性耗散率 $\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$ 不可逆地转化为内能。

动能变化率 = 表面牵引力功率 + 体力功率 - 黏性耗散率。

若体力是重力等保守力，还可以把相应功率与势能变化合并。对于固定控制体，还需把流体穿过控制面所携带的动能通量计入整体收支；但无论采用哪种控制体， Φ 的耗散含义不变。

2.16.3 为什么耗散一定非负

对于普通 Newton 流体， $\mu > 0$ ，而

$$\Phi = 2\mu D : D = 2\mu \sum_{i,j} D_{ij}^2 \geq 0.$$

因此 $-\Phi$ 在机械能方程中永远是损失项。这里的“损失”不是总能量消失，而是有组织的宏观机械能不可逆地转化为内能；若同时求解热方程，这部分能量会以黏性生热的形式出现。单位质量耗散率为 Φ/ρ 。

对于简单剪切流 $u = (u(y), 0, 0)$ ，

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (2.45)$$

以间距为 h 、上壁速度为 U 的平面 Couette 流为例， $du/dy = U/h$ ，故单位体积耗散率为 $\mu(U/h)^2$ 。在单位壁面积所对应的流体层内积分，得到

$$\int_0^h \Phi dy = \frac{\mu U^2}{h} = \tau_w U. \quad (2.46)$$

这里用 $\tau_w = \mu U/h > 0$ 表示运动壁面剪切应力的大小，右端正是运动壁面对流体输入的功率。稳态时，壁面持续输入的机械能全部由黏性耗散。这与第 4 章 Couette 流的功率计算完全一致。类似地，对于截面和流量均不随流向变化的稳态压强驱动充分发展流动，入口与出口的动能通量相同，压强功率输入最终由流体内部的黏性耗散平衡；静止固壁虽然施加剪切牵引，却不作机械功。

i 黏性的双重角色

在动量方程中，黏性表现为**动量扩散**；在机械能方程中，黏性表现为**机械能不可逆耗散**。二者来自同一个 Newton 黏性应力，但回答的是不同问题。

这条能量线索贯穿全书：第 1 章讨论黏性的动量输运与耗散双重作用；第 4 章中的压强功率和运动壁面功率为机械能输入；第 8 章中，湍流把大尺度动能逐级传递到小尺度，最终仍由分子黏性转化为内能。这里的 Φ/ρ 是瞬时流动的分分子耗散率；湍流理论中的平均耗散率则由脉动变形率的统计平均定义，物理根源相同。

2.17 Navier–Stokes 方程为什么难

不可压缩 Newton 流体的控制方程形式并不长：

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + b.$$

但这些方程可以产生非常丰富和复杂的流动现象，其困难主要来自几个方面。

1. **对流项的非线性。** $u \cdot \nabla u$ 中未知速度既作为被求解变量，又作为输运速度，使方程非线性。
2. **压强与速度耦合。** 连续性方程和动量方程共同决定速度与压强，压强不是一个简单的独立演化变量。
3. **边界条件的重要性。** 无滑移边界条件会在固壁附近形成显著速度梯度，使黏性效应即使在高 Reynolds 数流动中也不能简单忽略。
4. **多尺度结构。** 随着 Reynolds 数增大，流动可能同时包含尺度差异很大的结构。边界层、剪切层、尾迹和湍流都体现了这一特点。

因此，本书后续并不会试图“一般地求解 Navier–Stokes 方程”，而是通过无量纲化、对称性、物理假设、尺度分析、渐近近似和数值计算，逐步理解不同流动问题中的主导机制。

2.18 本章主线与小结

本章的核心知识链可以压缩为

$$\underbrace{\text{质量守恒} + \text{线动量守恒}}_{\text{普适守恒定律}} + \underbrace{\text{Newton 流体本构关系}}_{\text{材料响应}} \implies \underbrace{\text{Navier–Stokes 方程组} + \text{初始与边界条件}}_{\text{封闭的初边值问题}}.$$

对这条主线作旋度运算可得到涡量输运方程，与速度点乘则可得到机械能方程；两者是加强路线，不会改变核心模型的未知量、守恒定律和边界条件结构。

1. **Euler 描述和物质导数把场变量与流体质点经历联系起来。** $D/Dt = \partial/\partial t + u \cdot \nabla$ ，因此稳态流动仍可具有非零对流加速度。
2. **质量守恒给出连续性方程。** 一般形式为 $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho u) = 0$ ；常密度不可压缩流动满足 $\nabla \cdot u = 0$ 。
3. **应力张量统一描述任意表面上的牵引。** $t^{(n)} = \sigma \cdot n$ ，且 $\sigma = -pI + \tau$ ；法向选择决定牵引方向，不能脱离约定判断符号。
4. **本构关系使守恒方程封闭。** 对不可压缩 Newton 流体， $\tau = 2\mu D$ ；与 Cauchy 动量方程结合后得到不可压缩、常黏度 Navier–Stokes 方程。后续简化的关键是根据几何、边界和尺度判断主导平衡。
5. **不可压缩压强承担约束作用。** 压强与速度耦合，并满足由动量方程和零散度条件导出的 Poisson 方程；求解时还需要相容的边界信息和压强基准。
6. **控制方程必须与条件共同构成初边值问题。** 固壁速度、牵引、入口出口、对称和周期条件各有不同物理含义，不能在同一边界上任意重复指定互不相容的信息。

7. **涡量和机械能提供两种加强视角。**取旋度揭示涡量对流、三维伸展和黏性扩散；与速度点乘则区分可正可负的应力功输运与正定耗散 $\Phi = 2\mu D:D$ 。黏性既扩散动量，也把宏观机械能不可逆地转化为内能。

习题

题目层级： 必做（核心概念、基本推导与标准计算）； 选做（进阶推导、专题应用与方法比较）； 研究训练（开放论证、建模判断、CFD/实验分析或综合研究）。

基础题

2.1 必做 给定二维稳态速度场 $u = ay$ 、 $v = 0$ ，其中 a 为常数。

1. 计算局部加速度；
2. 计算对流加速度；
3. 该流场中流体质点是否具有加速度？

2.2 必做 给定二维稳态速度场 $u = ax$ 、 $v = -ay$ 。

1. 判断其是否满足不可压缩连续性方程；
2. 计算 x 和 y 方向对流加速度；
3. 说明“稳态”为什么不意味着“流体质点没有加速度”。

2.3 必做 对于三维速度场 $u = (u, v, w)$ ，证明不可压缩条件可以写成 $\text{tr}(D) = 0$ 。

2.4 必做 解释以下三者之间的区别：

1. 压强 p ；
2. 总应力张量 σ ；
3. 黏性应力张量 τ 。

并写出三者之间的关系。

2.5 必做 对简单剪切流 $u = (\gamma y, 0, 0)$ ，求变形率张量 D ，并由 $\tau = 2\mu D$ 证明 $\tau_{xy} = \mu\gamma$ 。

理解题

2.6 必做 考虑刚体式二维旋转 $u = -\Omega y$ 、 $v = \Omega x$ 。

1. 判断该速度场是否满足不可压缩条件；
2. 计算变形率张量 D ；
3. 对不可压缩 Newton 流体，黏性应力是否为零？
4. 这个结果说明了什么？

2.7 必做 为什么 Cauchy 动量方程 $\rho Du/Dt = \nabla \cdot \sigma + \rho b$ 还不能直接称为 Navier-Stokes 方程？说明还需要加入什么物理关系。

- 2.8 必做** 为什么压强梯度可以使静止流体开始运动，而均匀压强本身不能产生流体加速度？
- 2.9 必做** 说明下列说法是否正确：“不可压缩流动意味着流场中任意位置的密度永远必须具有相同数值。”请结合 $D\rho/Dt + \rho\nabla \cdot u = 0$ 讨论。
- 2.10 必做** 为什么对于普通 Newton 流体，纯刚体转动不应产生黏性应力？从物理和数学两个角度解释。

方程简化题

- 2.11 必做** 考虑二维稳态平行流 $u = (u(y), 0, 0)$ 。从二维不可压缩 Navier-Stokes 方程出发，在忽略体力的情况下证明 $\partial p / \partial y = 0$ ，且

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

说明这一结果的物理意义。

- 2.12 必做** 考虑竖直方向的一维稳态静止流体 $u = 0$ 。若 z 轴竖直向上，重力为 $g = -ge_z$ ，从 Navier-Stokes 方程推导静水压强关系 $dp/dz = -\rho g$ 。这说明 Navier-Stokes 方程如何包含流体静力学？

- 2.13 必做** 对于二维不可压缩流动，给定 $u = U_0$ 、 $v = 0$ ，其中 U_0 为常数。若无体力且压强均匀：
1. 连续性方程是否满足？
 2. 动量方程是否满足？
 3. 黏性项是否存在？
 4. 为什么流体具有非零速度却没有黏性应力？

边界条件题

- 2.14 必做** 对以下边界分别写出合适的速度、应力或配对条件：

1. 静止不可渗透固壁；
2. 以速度 U_w 沿 x 方向运动的平板；
3. 关于 $y = 0$ 的二维对称面；
4. 已知表面牵引力 t_b 的边界；
5. 沿 x 方向相距 L_x 的一对周期边界。

- 2.15 必做** 某二维通道关于中心线 $y = 0$ 对称。在中心线上，为什么可以使用 $v = 0$ 、 $\partial u / \partial y = 0$ 作为边界条件？分别解释这两个条件的物理含义。

涡量题

- 2.16 必做** 分别计算下列二维速度场的涡量和变形率张量，并判断黏性应力是否为零：

1. 简单剪切流 $u = \gamma y$, $v = 0$;
2. 刚体转动 $u = -\Omega y$, $v = \Omega x$ 。

为什么“涡量非零”不能直接推出“黏性应力非零”？

2.17 选做 从式 2.34 出发，说明为什么二维、不可压缩、无旋体力流动满足式 2.37。你的推导应明确指出三维涡伸展项为什么消失。

2.18 选做 Stokes 第一问题满足 $u = (u(y, t), 0, 0)$ 和 $\partial u / \partial t = \nu \partial^2 u / \partial y^2$ 。

1. 写出唯一非零的涡量分量；
2. 证明该涡量分量满足一维扩散方程；
3. 解释为什么这可以看成“运动壁面附近的涡量向流体内部扩散”。

机械能题

2.19 必做 平面 Couette 流位于 $0 \leq y \leq h$ ，下壁静止，上壁以速度 U 运动，速度分布为 $u = Uy/h$ 。

1. 计算局部黏性耗散率 Φ ；
2. 对 $0 \leq y \leq h$ 积分，求单位壁面积内的总耗散功率；
3. 由壁面剪切应力计算运动壁面输入的功率，并验证稳态机械能收支。

2.20 选做 从式 2.39 和 $\sigma = -pI + 2\mu D$ 出发，推导式 2.41。说明为什么压强功率项不是正定耗散，并解释“机械能耗散”是否意味着总能量不守恒。

综合题

2.21 选做 从不可压缩 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + b$$

出发，为下列每种流动判断哪些项必然为零，并说明原因：

1. 稳态均匀流；
2. 静止流体；
3. 稳态充分发展平行流；
4. 无压强梯度的非稳态单向平行流。

本题不要求求解，只要求做物理条件与方程项之间的对应分析。

2.22 研究训练 比较以下两种说法：A：“Navier-Stokes 方程很复杂，因为公式很长。”B：“Navier-Stokes 方程很复杂，主要因为速度对流项非线性、压强速度耦合以及不同尺度之间的相互作用。”你认为哪一种理解更准确？结合本章内容说明理由。

2.23 研究训练 对不可压缩 Newton 流体，已知 $\sigma = -pI + 2\mu D$ 。考虑法向为 n 的任意表面：

1. 写出该表面的牵引向量；
2. 说明其中哪一部分来自压强；
3. 哪一部分来自黏性；
4. 为什么压强贡献总是沿表面法向，而黏性贡献一般既可以有法向分量也可以有切向分量？

思考与讨论

1. 为什么“速度为零”一定意味着对流加速度为零，但“稳态”不一定意味着对流加速度为零？
2. 为什么连续性方程不是一个关于压强的演化方程，但它却会影响不可压缩流动中的压强分布？结合压强 Poisson 方程说明。
3. 如果没有 Newton 流体本构关系，仅有质量守恒和动量守恒，能否唯一确定黏性流动？
4. 为什么 Navier-Stokes 方程中的黏性项表现为速度的二阶空间导数？
5. 为什么说无滑移边界条件可以使一个整体 Reynolds 数很大的流动在壁面附近仍然保留强烈的黏性效应？
6. 为什么二维涡量方程没有涡伸展项，而三维湍流中的涡伸展非常重要？
7. 黏性耗散使机械能减少，为什么这并不违反能量守恒？
8. 对于一个新的流动问题，在真正求解方程之前，首先应该从几何、稳态性、对称性和边界条件中提取哪些信息？